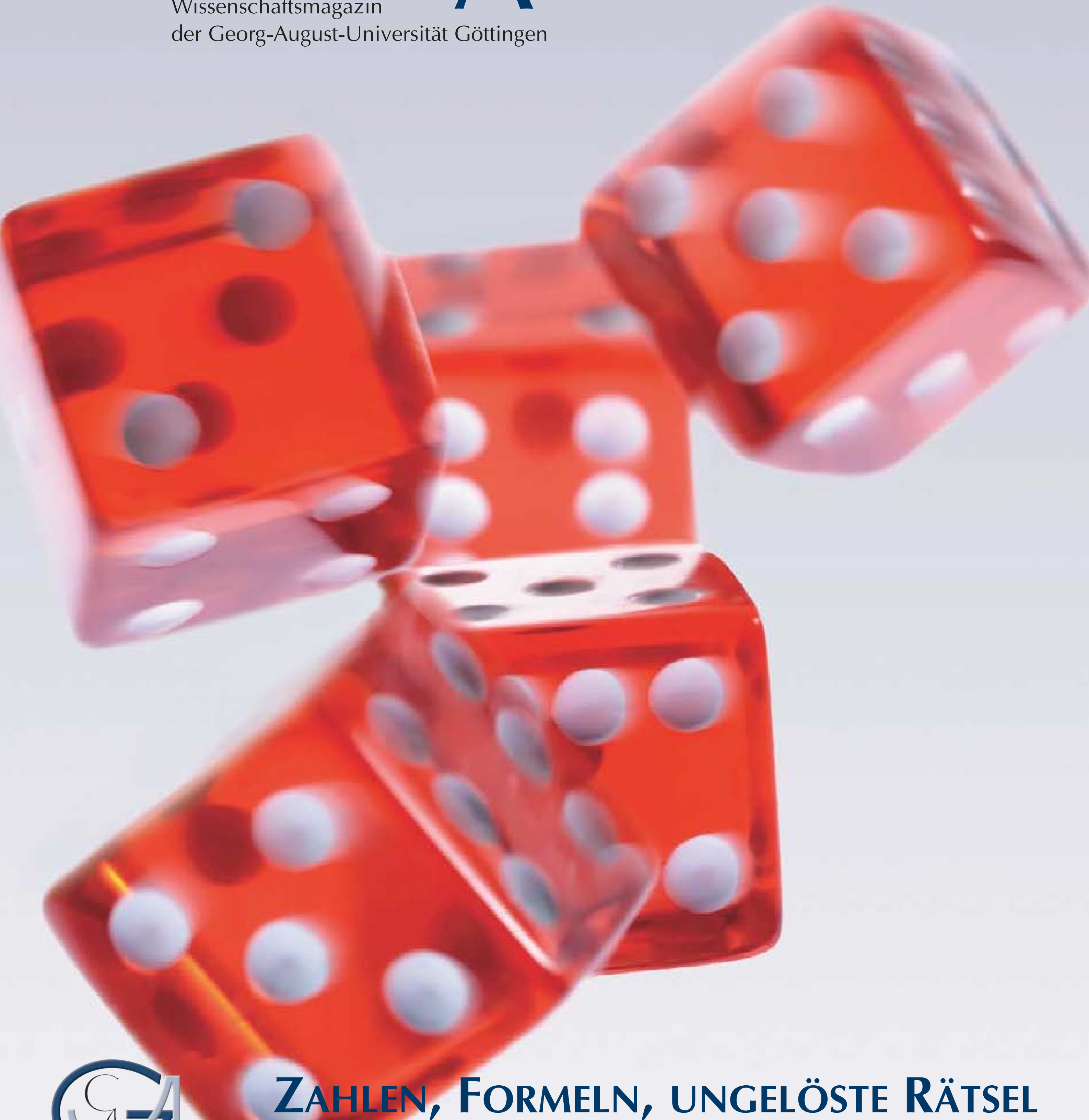
Göttingen im Jahr der Mathematik 2008

GEORGIA AUGUSTA

Wissenschaftsmagazin
der Georg-August-Universität Göttingen



Zahlen, Formeln, ungelöste Rätsel

Ausgabe 6 · Dezember 2008

Herausgegeben vom Präsidenten der Universität in Zusammenarbeit mit dem Universitätsbund Göttingen

GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT
GÖTTINGEN

Alumni Göttingen

Internationale Alumni-Vereinigung

Alumni Göttingen ist das internationale Netzwerk von Ehemaligen, Absolventen und Studierenden aller Fachrichtungen, Wissenschaftlern, Mitarbeitern sowie Freunden und Förderern der Universität Göttingen. Dieses Netzwerk wird getragen von dem gemeinnützigen Verein Alumni Göttingen e.V., der im Jahr 2001 gegründet wurde. Der Verein zählt inzwischen mehr als 3.000 Mitglieder und ermöglicht die kontinuierliche und lebendige Teilhabe und das aktive Mitwirken an der Entwicklung der Georgia Augusta.

Alumni Göttingen
Internationale Alumni-Vereinigung
Georg-August-Universität Göttingen

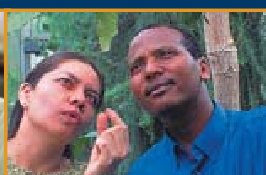
Postanschrift
Alumni Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Wilhelmsplatz 1 · 37073 Göttingen

Internet
www.alumni.uni-goettingen.de

Alumni-Büro
Bernd Hackstette · *Geschäftsführer Alumni Göttingen e.V.*
Tel. 0551 / 39 13276 · Fax 0551 / 39 185380
bernd.hackstette@alumni.uni-goettingen.de

Susanne Schmidt · *Sekretariat*
Tel. 0551 / 39 5380 · Fax 0551 / 39 185380
susanne.schmidt@alumni.uni-goettingen.de



Zahlen, Formeln, ungelöste Rätsel

Die Mathematik nimmt im System der Wissenschaften eine »schillernde Stellung« ein, wie der Göttinger Mathematiker Felix Klein es einmal formulierte. Die von Carl Friedrich Gauß als »Königin der Wissenschaften« titulierte Mathematik gehört nicht zu den Naturwissenschaften, da sie keine empirische Wissenschaft ist. Zugleich wäre es jedoch, so einer der Autoren in diesem Forschungsmagazin, »gewaltsam«, sie den Geisteswissenschaften zuzuordnen. Sie sei weder eine Buchwissenschaft, noch befasse sie sich mit dem Menschen und dessen Kulturleistungen. Andererseits stellt sie jedoch selbst eine sehr freie Kulturleistung dar. Sie ist letztlich nur dem Denken verantwortlich, und ihre Erkenntnis liegt überwiegend im Verstehen von Zusammenhängen, ohne dass die Empirie das letzte Wort hätte.

Die Georgia Augusta hat Wissenschaftsgeschichte geschrieben, man spricht im frühen 20. Jahrhundert von einem Mekka der Mathematik und von Göttingen als der Wiege der modernen Naturwissenschaften. Die beeindruckende Ahnengalerie wird angeführt von Gauß, der über ein halbes Jahrhundert in Göttingen lebte und forschte. Sein Wirken verhalf der Disziplin und ihren Anwendungen an der Göttinger Universität zu einer herausragenden Stellung, die in den nachfolgenden Jahren durch Dirichlet, Riemann, Klein und Hilbert weiter ausgebaut wurde. Auf dieser Grundlage konnte in der Verknüpfung von Mathematik mit Chemie und Physik entstehen, was als Göttinger Nobelpreiswunder bis heute das Ansehen unserer Universität mitbestimmt und das wir im Rahmen unseres Zukunftskonzeptes in der Exzellenzinitiative mit neuem Leben füllen wollen.

Im »Jahr der Mathematik« soll diese Ausgabe unseres Wissenschaftsmagazins »Georgia Augusta« über die große Geschichte der Mathematik hinaus ihre heutigen Herausforderungen und ihre Anwendungen in verschiedenen

Disziplinen vorstellen. Am Ende wollen wir erlebbar machen, was David Hilbert über seine Wissenschaft gesagt hat: »*Die Mathematik ist das Instrument, welches die Vermittlung bewirkt zwischen Theorie und Praxis, zwischen Denken und Beobachten: sie baut die verbindende Brücke und gestaltet sie immer tragfähiger. Daher kommt es, dass unsere ganze gegenwärtige Kultur, soweit sie auf der geistigen Durchdringung und Dienstbarmachung der Natur beruht, ihre Grundlage in der Mathematik findet.*«

Prof. Dr. Kurt von Figura
Präsident

Numbers, formulae, unsolved riddles

As the Göttingen mathematician Felix Klein once put it, mathematics occupies an ›enigmatic position‹ within the systematic order of the sciences. Deemed the ›queen of the sciences‹ by Carl Friedrich Gauss, mathematics does not belong to the natural sciences, since it is not an empirical subject. Yet at the same time it would be an »act of force«, according to one of our authors in this research magazine, to assign it to the humanities. It is neither a science of the book, nor does it deal with the human being and her cultural achievements. On the other hand, it itself represents a cultural achievement enjoying considerable freedom.

Mathematics is ultimately accountable only to thought, and its findings lie primarily in understanding connections, without empiricism having the final say.

Scientific history has been written by the Georg-August-Universität: in the context of the early 20th century the University is referred to as a Mecca of mathematics, and Göttingen as the cradle of the modern natural sciences. At the head of the impressive ancestral gallery is Gauss, who lived and researched in Göttingen for more than half a century. It was his work that led mathematics and its applications at Göttingen University to assume a position of special prominence, a position enhanced yet further in subsequent years by Dirichlet, Riemann, Klein and Hilbert. What came about on this basis, through the interaction of mathematics with chemistry and physics, made Göttingen's ›Nobel Prize Wonder‹ possible and contributes to the shaping of our University's reputation to this day. In realising our institutional strategy for the future, as articulated in the Excellence Initiative for the promotion of top-level research in Germany, we intend to endow it with new life.

In this, the »Year of Mathematics«, our research magazine goes beyond presenting the subject's great history to consider the challenges confronting mathematics today and its applications within various other disciplines. We wish you stimulating reading.

Prof. Dr. Kurt von Figura
President

Inhaltsverzeichnis

Prof. Dr. Felix Mühlhölzer
4 Philosophieren über Mathematik: Warum es so schwer ist

Mathematik macht Geschichte

Prof. Dr. Benno Artmann
14 Hochburg der Mathematik
Die Göttinger Mathematik und ihre Protagonisten

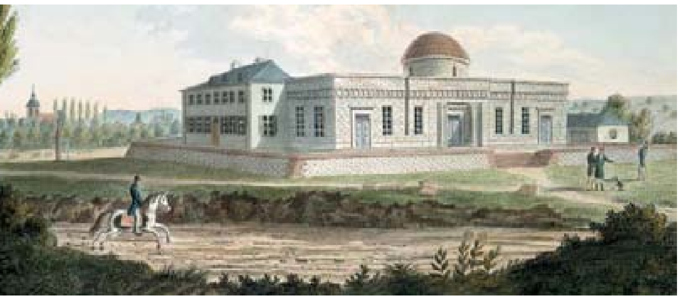
Prof. Dr. Yuri Tschinkel
24 Die Felix Klein Protokolle
Aus dem »Giftschrank« der Mathematischen Fakultät

Prof. Dr. Hubert Goenner
30 Exzellenz für die Mathematik
David Hilbert – Felix Klein – Hermann Minkowski

Dr. Cordula Tollmien
38 Weibliches Genie
Frau und Mathematiker: Emmy Noether

45 Sofja Kowalewskaja (1850 bis 1891) die erste promovierte Mathematikerin und die erste Professorin im Europa der Neuzeit
Von Cordula Tollmien

Dr. Axel Wittmann
46 Sterne, Zahlen und Dreiecke
Carl Friedrich Gauß – der Fürst der Mathematik als Astronom und Geodät



Mathematik löst Probleme

Prof. Dr. Florentin Wörgötter
55 Lernende Systeme
Mathematik – der Klebstoff für interdisziplinäre Forschung

Prof. Dr. Axel Munk
62 … und Gott würfelt doch – aber mit System
Mit Statistik den Zufall kontrollieren

67 Deutsch-Schweizer Statistik-Forschergruppe: Statistische Regularisierung unter qualitativen Nebenbedingungen – Inferenz, Algorithmen, Asymptotik und Anwendungen

Prof. Stephan Klasen, Ph.D.
69 Armut messen, erklären und überwinden
Armutsforschung, Mathematik und Statistik

73 Courant Forschungszentrum »Armut, Ungleichheit und Wachstum in Entwicklungsländern: Statistische Methoden und empirische Analysen«

75 Tatyana Krivobokova: Die Realität hinter den Daten
Von Heidi Niemann

Prof. Dr. Anita Schöbel
76 Warten oder nicht warten?
Optimierung im öffentlichen Verkehr

83 Interdisziplinäre Lehre: Neue Projekte in der Mathematik

86 Mathematik-Olympiade: Früh übt sich ...
...wer ein guter Mathematiker werden will

Prof. Dr. Rainer Kreß
88 Mathematische Methoden in Medizin und Technik
Inverse Probleme und Tomographie

92 Graduiertenkolleg »Identifikation in mathematischen Modellen: Synergie stochastischer und numerischer Methoden«

MATHEMATIK SCHAFFT WISSEN

Prof. Dr. Ralf Meyer
96 Der Raum hinter den Räumen
Nichtkommutative Geometrie

103 Graduiertenkolleg »Mathematische Strukturen in der modernen Quantenphysik«

Prof. Dr. Thomas Schick
104 Die vierte Dimension
... oder wann ist die Krümmung positiv?

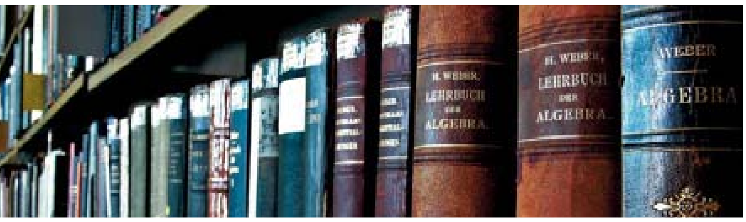
106 Courant Forschungszentrum »Strukturen höherer Ordnung in der Mathematik«

Prof. Dr. Xiaoming Fu, Prof. Dr. Dieter Hogrefe, Prof. Dr. Henning Schulzrinne
112 Kein Tempolimit für die Datenautobahn
Visionen für das Internet der Zukunft

116 Zentrum für Informatik

Privatdozentin Dr. Katharina Habermann
119 Informationsspezialisten am Werk
Die Göttinger Universitätsbibliothek und ihr Sondersammelgebiet »Reine Mathematik«

122 Das Zentralarchiv für Mathematiker-Nachlässe an der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen



Die bisher erschienenen Ausgaben der Georgia Augusta sind im Internet abrufbar unter www.uni-goettingen.de/wissenschaftsmagazin

Ausgabe 1 · **Leben braucht Vielfalt – Biodiversität** (2002)

Ausgabe 2 · **Gehirn und Verstehen** (2003)

Ausgabe 3 · **Europa – Alte und Neue Welten** (2004)

Ausgabe 4 · **Materialien und Stoffe** (2005)

Ausgabe 5 · **Kulturen und Konflikte** (2007)

MATHEMATIK IST KUNST

Prof. Dr. Thomas Noll
126 Nach Maß, Zahl und Gewicht
Zahlen und ihre Bedeutung in der christlichen Kunst

Prof. Dr. Andreas Waczkat
136 ars musica – ars mathematica?
Musik als quadriviale Kunst und Wissenschaft. Ein antikes Konzept und sein neuzeitliches Erbe

143 Verzeichnis der Autoren und Forschungseinrichtungen

IMPRESSUM

Herausgeber: Der Präsident der Universität Göttingen in Zusammenarbeit mit dem Universitätsbund Göttingen e.V.

Redaktion: Marietta Fuhrmann-Koch (verantwortlich), Beate Hentschel
Englischsprachige Texte: Victoria Viebahn

Wissenschaftlicher Beirat: Prof. Dr. med. Matthias Bähr
Prof. Dr. Dr. Bertram Brenig
Prof. Dr. Rüdiger Hardeland
Prof. Dr. Reinhard Gregor Kratz
Prof. Dr. Konrad Samwer
Prof. Dr. Eva Schumann
Ilse Stein
Prof. Dr. Dr. h.c. Lutz F. Tietze
Thedel von Wallmoden
Prof. Dr. Simone Winko

Für den Universitätsbund Göttingen e.V.:
Prof. Dr. Horst Kern
Prof. Dr. Jens Frahm

Anschrift der Redaktion: Georg-August-Universität Göttingen
Presse, Kommunikation und Marketing
Wilhelmsplatz 1, 37073 Göttingen
Tel. (0551) 39-4342
Fax (0551) 39-4251
pressestelle@uni-goettingen.de
www.uni-goettingen.de

Gestaltung, Layout: Rothe Grafik, Georgsmarienhütte

Druck: Druckhaus Fromm

Auflage: 8.500 Exemplare

Namentlich gekennzeichnete Artikel geben die Meinung des Verfassers wieder, nicht unbedingt die des Herausgebers oder der Redaktion.

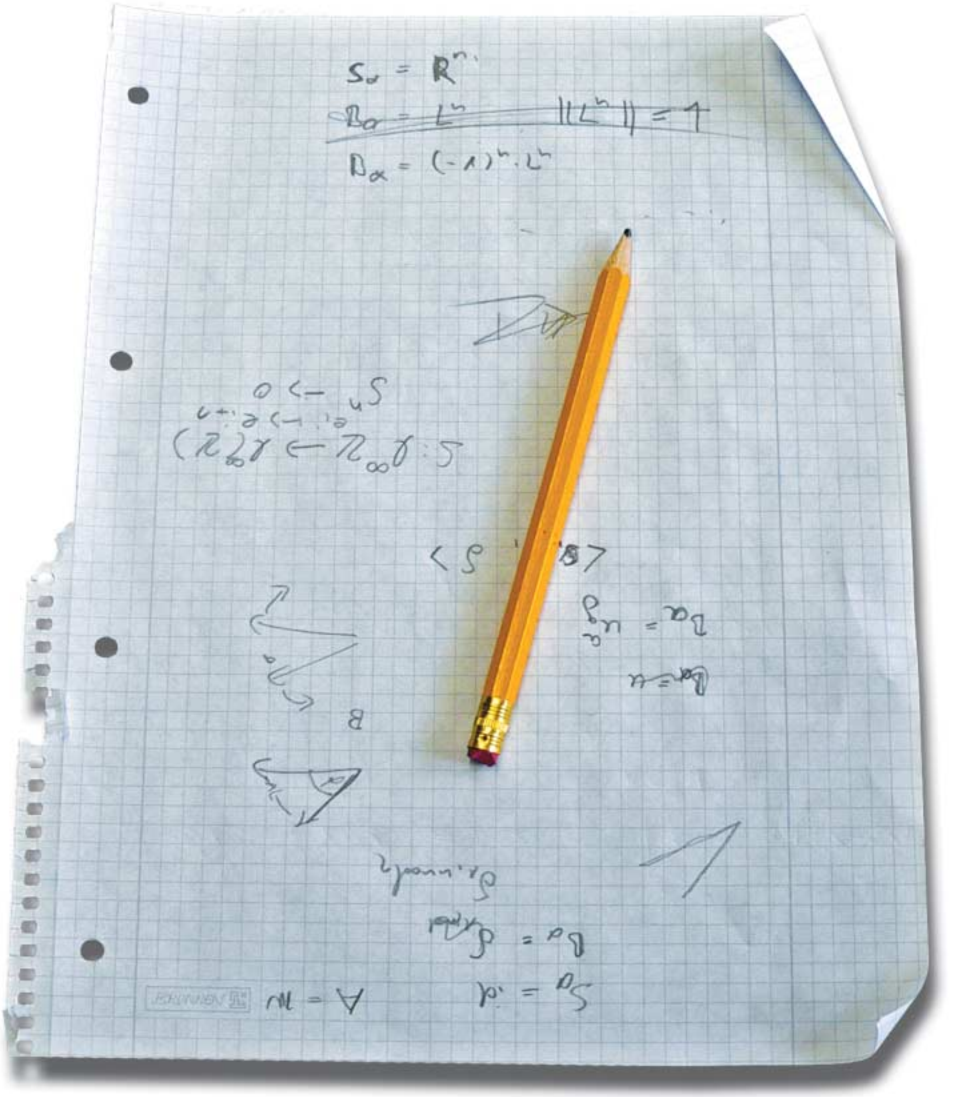
ISSN 0016-8157

Foto: Gisa Kirschmann-Schröder

Philosophieren über Mathematik: Warum es so schwer ist

Felix Mühlhölzer

Im Jahr 1979 veröffentlichte der Philosoph Hilary Putnam einen Aufsatz mit dem Titel »Philosophy of Mathematics: A Report«, den er bei einem späteren Wiederabdruck (in seiner 1994 erschienen Aufsatzsammlung Words & Life) umbenannte in »Philosophy of Mathematics: Why Nothing Works«. Putnam geht darin die wichtigsten Standardpositionen in der Philosophie der Mathematik durch, hebt auf originelle Weise einige ihrer weniger bekannten, aber dennoch grundsätzlichen Mängel hervor und stellt gegen Ende fest, »[a] depressing survey of ›why nothing works‹« gegeben zu haben. Zwar lässt er es mit diesem Urteil nicht gänzlich bewenden, sondern schließt, beginnend mit der Tröstung »while things are dark they are not altogether hopeless«, noch einen kurzen Abschnitt über möglicherweise gangbare Wege aus dem Dunkel an; er gibt in seinem Aufsatz jedoch keine explizite Diagnose, warum denn das Philosophieren über Mathematik augenscheinlich so überaus schwierig ist. Was sind die tieferen Gründe für die von Putnam beschriebene missliche Lage?



Mein Verständnis von Philosophie orientiert sich an Kants Charakterisierung, nach der alle Philosophie letztlich zur Beantwortung der einen Frage beitragen möchte: »Was ist der Mensch?« – wobei das Wort »Mensch« natürlich nicht im biologischen Sinn verstanden wird, sondern im Sinne des Menschen als geistigem Wesen. Die Philosophie der Mathematik handelt dann von denjenigen Äußerungen des menschlichen Geistes, die eben den Namen »Mathematik« tragen. Ihr Ziel ist die Klärung wesentlicher Charakteristika dieser Äußerungen, und dies nicht vom Standpunkt der Mathematiker selbst, sondern von einem distanzierten Standpunkt, der demjenigen eines Anthropologen ähnelt. Anders als die Anthropologie ist die Philosophie jedoch keine empirische Wissenschaft, sondern beschäftigt sich nur mit den allergrundsätzlichsten Fragen, die sich – so ihre Hoffnung – auf andere Weise als die übliche empirisch-wissenschaftliche beantworten lassen. Auch Mathematiker bemühen sich innerhalb ihres Faches manchmal um eine Klärung der eigenen Praxis, wie dies etwa Hilbert mit seiner ›Beweistheorie‹ versuchte, die selbst als mathematische Theorie auftritt. Vielleicht kann man, worauf Kenny Easwaran hingewiesen hat, sogar sämtliche von den Mathematikern angebotenen Axiomatisierungen ihrer Theorien als Klärungen ihrer Praxis begreifen, und zwar als solche, die es nun gerade erlauben, innerhalb der Mathematik zu bleiben und eigentlich Philosophischem aus dem Weg zu gehen. Echte Philosophie der Mathematik jedoch nimmt bewusst einen externen Standpunkt ein, um gegenüber der mathematischen Praxis eine größere Unabhängigkeit und Objektivität zu erreichen. Und wir müssen nun verstehen, warum diese echte Philosophie der Mathematik so schwierig ist.

Zwei schlechte Gründe

Zwei schlechte Gründe, die man hier vielleicht zu nennen geneigt sein könnte, möchte ich gleich aus dem Weg räumen. Erstens könnte jemand sagen wollen, dass das Philosophieren über Mathematik so schwer sei, weil die Mathematik selbst so schwer ist. Diese Meinung ist jedoch ganz falsch in Bezug auf viele der wirklich fundamentalen Fragen der Philosophie der Mathematik, die sich zu einem beträchtlichen Teil schon an Beispielen sehr einfacher und elementarer Mathematik behandeln lassen. Betrachten wir etwa die übliche und jedermann bekannte Divisionstechnik, die es erlaubt, Brüche wie $1/3$, $7/12$ etc. in Dezimaldarstellung zu bringen, und mittels derer wir beispielsweise im Falle von $1/3$ als Ergebnis erhalten: $1/3 = 0{,}333\ldots$. Auch ohne größere mathematische Kompetenz versteht hier jeder, dass sich in dieser Dezimaldarstellung die Ziffer »3« unendlich oft wiederholt (was durch die drei Pünktchen angedeutet wird); dass dies kein Zufall ist, sondern eine mathematische Notwendigkeit; dass die Einsicht in die Wahrheit der Gleichung »$1/3 = 0{,}333\ldots$« eine apriorische ist, das heißt, dass sie nicht aus Erfahrung gewonnen wurde, sondern auf rein denkerischem Wege; und jeder spürt auch, dass der durch »$1/3 = 0{,}333\ldots$« ausgedrückte Sachverhalt, oder Zusammenhang, ein irgendwie formaler ist, der wesentlich symbolische Manipulationen betrifft, und kein ›inhaltlicher‹, wie dies typisch für den Fall empirischer Sachverhalte ist. Genau die soeben hervorgehobenen Begriffe – »unendlich«, »mathematische Notwendigkeit«, »a priori«, »formal« – stehen nun im Zentrum der Philosophie der Mathematik, und sie erweisen sich als schwierig, auch wenn das betreffende mathematische Beispiel selbst ganz elementar ist. Man muß sich zu ihrer Klärung nicht unbedingt in höhere mathematische Gefilde begeben.

Der zweite schlechte Grund, der häufig für die Schwierigkeit der Philosophie der Mathematik genannt wird, betrifft die Abstraktheit der mathematischen Gegenstände, die nicht in das naturwissenschaftliche Weltbild vieler Empiristen und Naturalisten zu passen scheinen. Empiristen und Naturalisten wollen die Bezugnahme auf diese Gegenstände deswegen als verzichtbar nachweisen – und haben nun damit ihre Schwierigkeiten. Dies ist jedoch ein für die Philosophie der Mathematik uninteressantes Problem, da uns abstrakte Gegenstände auch außerhalb der Mathematik völlig vertraut sind. Jedes Kind versteht zum Beispiel, was ein Buchstabe ist, etwa ein »A«, und zwar im Sinne eines Gestalt-Typs, nicht im Sinne einer konkreten Realisierung dieses Typs, und damit hat das Kind ›Zugang zu einem abstrakten Gegenstand‹, eben, beispielsweise, dem Buchstaben »A«. Nun erhebt sich die Mathematik zwar in schwindelerregende Höhen der Abstraktion und geht damit weit über Buchstaben-Typen und sonstiges Lebensweltliches hinaus, aber Entfernungen vom Lebensweltlichen durch Einführung abstrakter Gegenstände sind charakteristisch für die meisten Wissenschaften, und dass die spezifischen Gegenstände gerade der Mathematik nun aufgrund ihrer Abstraktheit besondere philosophische Probleme aufwürfen, ist überhaupt nicht ausgemacht. Eine wichtige Ausnahme stellt allerdings die Beschäftigung mit dem Unendlichen dar, auf die ich weiter unten eingehen werde.

Die Einzigartigkeit der Mathematik

Kommen wir nun zu den echten Gründen, die das Philosophieren über Mathematik so schwer machen. Sie rühren zu einem großen Teil daher, dass die Mathematik in Gestalten auftritt – in der spezifischen Art ihrer Sprache und Symbolik –, die uns zu charakteristischen Verwechslungen und falschen Analogien verleiten. So scheinen mathematische Sätze Aussagen ganz analog zu den Aussagen der empirischen Wissenschaften zu sein, nur dass sie eben mathematische Sachverhalte beschreiben und nicht empirische; mathematische Beweise können dann wie Verifikationsverfahren für jene Aussagen wirken, in Analogie zu Verifikationen im Empirischen; und mathematische Funktionen können uns vorkommen wie Maschinen, die bei bestimmtem Input einen Output liefern, nur dass sie irgendwie starrer, idealer sind als reale Maschinen (die ja, anders als die mathematischen, auch einmal kaputtgehen können). Analogien dieser Art drängen sich auf, führen uns aber in die Irre. In Wirklichkeit ist die Mathematik und sind ihre Gegenstände sui generis, und eine Grundschwierigkeit der Philosophie der Mathematik liegt darin, bequeme Angleichungen an anderes zu vermeiden und den völlig eigenständigen Charakter der Mathematik angemessen zu begreifen und zu beschreiben.

Diese Schwierigkeit zeigt sich schon auf augenfällige Weise an der schillernden ›Stellung der Mathematik im System der Wissenschaften‹ (um eine Formulierung Felix Kleins zu benutzen), die sich im Angelsächsischen sogar darin niederschlägt, dass man dort die Mathematik – die von Gauß bekanntlich als »Königin der Wissenschaften« titulierte Mathematik! – überhaupt nicht zu den »sciences« zählt. Die Mathematik gehört sicherlich nicht zu den Naturwissenschaften, da sie keine empirische Wissenschaft ist, zugleich wäre es jedoch gewaltsam, sie den Geisteswissenschaften zuzuordnen, denn weder ist sie eine Buchwissenschaft, noch befasst sie sich mit dem Menschen und seinen Kulturleistungen. Andererseits weist sie doch eine große Nähe zu den Naturwissenschaften auf, indem sie deren kraftvollstes begriffliches Instrumentarium bereitstellt, und auch, weil sich naturwissenschaftliche und mathematische Erkenntnis auf erstaunliche Weise gegenseitig befruchten können. Geisteswissenschaftliche Züge zeigt sie immerhin darin, dass sie eine sehr freie Kulturleistung darstellt, die letztlich nur unserem Denken verantwortlich ist und deren Erkenntnis überwiegend im Verstehen von Zusammenhängen liegt, ohne dass, wie in den Naturwissenschaften, die Empirie das letzte Wort hätte. Vielmehr scheint die Mathematik in vielen Fällen überhaupt erst die Möglichkeit zu eröffnen, dass die Empirie zu klaren theoretischen Entscheidungen führt.

Apriorisches Wissen durch Beweise

Was sind nun die tieferen Gründe für diese Sonderstellung der Mathematik und, damit zusammenhängend, für die spezifischen Schwierigkeiten der Philosophie der Mathematik? Der wichtigste Grund liegt vielleicht in der Apriorität der Mathematik, also darin, dass mathematisches Wissen im Normalfall kein Erfahrungswissen ist. Es wird durch reines Denken gewonnen und im Normalfall durch Beweise. Aber was sind ›mathematische Beweise‹ und welche Rolle kommt ihnen genau zu? Und welchen Status haben die Axiome, die wir in vielen (oder sogar allen?) Beweisen einfach voraussetzen, ohne sie ihrerseits zu beweisen? Welches Wissen – apriorisches Wissen – haben wir von ihnen?

Betrachten wir zunächst die Frage nach den Beweisen: was sie genau sind und welche Rolle ihnen zukommt. Schon ein Blick in die Geschichte der Mathematik zeigt, dass diese Frage nicht leicht zu beantworten sein dürfte, denn dort stößt man, von den Babyloniern bis heute, auf die verschiedenartigsten Auffassungen, verschiedenartig im Hinblick auf die erlaubten Beweismittel, die Anforderungen an Strenge, die zugrunde liegende Logik, die Rolle der Anschauung, die Verwendung von Axiomen, und anderes mehr. Darauf kann hier nicht eingegangen werden. Philosophisch besonders wichtig ist die erst im 20. Jahrhundert aufgeworfene Unterscheidung zweier ganz verschiedenartiger Grundeinstellungen zu Beweisen: dass man nämlich einen Beweis nicht nur (a) als Methode, sich der Wahrheit eines mathematischen Satzes zu versichern, ansehen kann, also als mathematische Verifikationsmethode, sondern, alternativ dazu, auch (b) als überhaupt erst den Sinn des bewiesenen Satzes bestimmend. Im Wort »beweisen« steckt ja »weisen«, also »zeigen«, und man kann sich fragen, was ein Beweis zeigt: zeigt er (a) die Wahrheit oder (b) den Sinn des bewiesenen Satzes?

Auf den ersten Blick mag (a) als überwältigend plausibel erscheinen. Den Sinn etwa von Fermats so genanntem ›letzten Theorem‹, also dem Satz

(F) Für alle ganzen Zahlen x, y, z, die ungleich Null sind, und alle natürlichen Zahlen n > 2 ist
$x^n + y^n \neq z^n$,

scheinen wir doch alle ganz leicht zu verstehen, während sein erst im September 1994 gelungener und wegen seiner Schwierigkeit nur ganz wenigen zugänglicher Beweis eben zeigt, dass der Satz tatsächlich wahr ist. So scheint es uns – aber die Sache ist in Wirklichkeit nicht so einfach, weil die Wörter »Wahrheit« und »Sinn« ihre Tücken haben, und dies besonders, wenn man sie auf mathematische Sätze anwendet.

Wie zum Beispiel soll man genau die Beziehung zwischen der Wahrheit eines mathematischen Satzes und dessen Beweis begreifen? Diese Frage wird in der angelsächsischen Literatur als das *Truth/Proof problem* bezeichnet. Fermats letztes Theorem (F) etwa handelt ja, wie man vielleicht sagen möchte, von einer bestimmten mathematischen Struktur, nämlich dem unendlichen Bereich ganzer Zahlen mit ihren Summen, Produkten und Potenzen, und (F) ist nun wahr, wenn in dieser Struktur gewisse mathematische Verhältnisse herrschen, eben gerade die von (F) ausgesagten; (F) wird von diesen Verhältnissen sozusagen wahr ›gemacht‹. Diese Art, über Wahrheit zu reden, blendet jedoch unsere mathematische Tätigkeit völlig aus, sodass diese Tätigkeit, und insbesondere das von uns praktizierte Beweisen, von der Wahrheit mathematischer Sätze zunächst einmal völlig getrennt erscheint! (»Gott sieht, ob jene mathematischen Verhältnisse vorliegen oder nicht, ganz gleich, ob und wie wir Menschen zu ihnen Zugang haben.«) Dies wird besonders deutlich in einem Fall wie (F), wo der Beweis, wie er tatsächlich vorliegt, aufgrund seines anspruchsvollen Charakters Lichtjahre entfernt ist von dem einfachen Bild des Wahrgemachtwerdens durch eine doch ganz elementare Struktur, eben diejenige der ganzen Zahlen mit Summen, Produkten und Potenzen. Anders ausgedrückt: Hier scheinen uns zwei völlig verschiedene Kriterien für die Wahrheit von (F) vorzuschweben, einerseits das Kriterium des Wahrgemachtwerdens durch jene Struktur, andererseits das Kriterium des Bewiesenwerdens durch Techniken unserer tatsächlichen mathematischen Praxis; und das Problem liegt nun darin, dass zwischen beiden Kriterien prima facie eine fast kategorial anmutende Kluft besteht, deren Überbrückung alles andere als auf der Hand liegt. Trifft der Beweis wirklich das, was wir bei der Formulierung des Kriteriums des Wahrgemachtwerdens verstanden zu haben glauben?

Die Auffassung (a) vom Beweis als Methode, sich der Wahrheit eines Satzes zu versichern, droht in skeptizistische Abgründe zu geraten, wodurch plötzlich Auffassung (b) attraktiv erscheinen kann: Vielleicht sollten wir Beweise nicht als verifizierend, sondern vielmehr als sinnstiftend ansehen? – Was könnte dies etwa im Falle von (F) heißen? Nun, problematisch an (F) ist das Vorkommnis des Wörtchens »alle«. Vielleicht möchte man sagen, dass darin doch keine Schwierigkeit liegt, denn kann man sich nicht einfach vorstellen, bei allen Tripeln *x, y, z* ganzer Zahlen, die ungleich Null sind, zu überprüfen, ob sie jeweils für irgendein $n > 2$ die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ erfüllen, und wenn dies nicht der Fall ist, dann ist (F) eben wahr? Zwar kann man dies wegen der Unendlichkeit des Zahlenbereichs natürlich nicht wirklich machen, aber handelt es sich dabei, wie Bertrand Russell einmal meinte, nicht nur um eine medizinische Unmöglichkeit und keineswegs um eine prinzipielle, sodass sie für den mathematischen Gehalt von (F) doch nicht wirklich relevant ist? – Diese Ansicht ist jedoch dubios, da sie den mathematischen Gehalt von (F) völlig von unserer tatsächlichen mathematischen Praxis abkoppelt. Gute Philosophie sollte sich an dieser Praxis orientieren, deren Kernstück eben die tatsächlich durchgeführten Beweise sind. Sie zeigen, was Mathematik wirklich ist. Und es klingt nun keineswegs abstrus, im Sinne von (b) zu sagen, dass der wirkliche mathematische Gehalt des in (F) vorkommenden »alle« erst durch den tatsächlichen Beweis von (F) gezeigt worden sei.

Entsprechend kann man, um ein anderes Beispiel heranzuziehen, auch die Auffassung vertreten, Cantors berühmtes Theorem, dass die Menge der reellen Zahlen von höherer (›überabzählbarer‹) Unendlichkeit sei als die Menge der natürlichen Zahlen, erhalte erst durch die Beweise, die Cantor gegeben hat, wirklich mathematischen Gehalt, weil man sich vorher unter jener ›höheren Unendlichkeit‹ wenig denken konnte. – Trotzdem wirkt Auffassung (b), die Beweise als sinnstiftend deklariert, übertrieben, denn sehr Vieles an mathematischen Sätzen verstehen wir, wie etwa im Falle von (F), doch auch dann, wenn wir den Beweis nicht kennen. Und (b) scheint zudem die befremdliche Konsequenz zu haben, oder zumindest nahezulegen, mathematischen Sätzen, die verschiedene Beweise besitzen (wie das gerade genannte Cantorsche Theorem und zahllose andere mathematische Sätze), dann auch entsprechend verschiedenen Sinn zuzuschreiben. Solch eine Sichtweise widerspräche bewährter mathematischer Praxis, die, wie gesagt, von guter Philosophie ernst genommen werden sollte.

Mathematische Beweise haben also einen schillernden Charakter. Es erscheint natürlich, sie als satzverifizierend anzusehen, aber sie scheinen auch sinnstiftend zu wirken, und zugleich kann weder die eine noch die andere Auffassung völlig richtig sein. Die philosophische Aufgabe in dieser Situation besteht darin, den wirklichen Charakter mathematischer Beweise, ihren Sui-generis-Charakter, in angemessenerer Weise zu beschreiben, und diese Aufgabe ist schwer.

Entsprechend ist es schwer, die charakteristische Apriorität der Mathematik richtig zu treffen, und dazu trägt, wie schon gesagt, zusätzlich der unklare Status der Axiome bei, die in mathematischen Beweisen unbewiesen vorausgesetzt werden. Auch in ihrem Fall, wie schon bei den Beweisen selbst, offenbart die Geschichte der Mathematik eine Vielzahl verschiedenartigster Auffassungen, auf die hier erneut nicht im Einzelnen eingegangen werden kann. Zu philosophisch besonders interessanten Überlegungen führte aber die Entdeckung (oder Erfindung?) der nicht-euklidischen Geometrien im 19. Jahrhundert, die den Gedanken nahelegte – er spielte vor allem für Hilbert eine große Rolle –, mathematische Axiome als ›implizite Definitionen‹ der von ihnen beschriebenen Strukturen und damit als ›konventionelle Festlegungen‹ aufzufassen. Von irgendeiner schwer zu präzisierenden ›Evidenz‹ der Axiome, wie man sie traditionellerweise unterstellte, musste dann nicht mehr die Rede sein, was als beträchtliche Befreiung von philosophisch Dunklem empfunden werden konnte. Diese Auffassung ist vielleicht tatsächlich im Falle geometrischer Axiome passend, und dann auch für die Axiome, die in der abstrakten Algebra, Topologie etc. formuliert werden, sie passt jedoch viel weniger auf die Standard-Axiome der Arithmetik (etwa die so genannten ›Peano-Axiome‹) oder der Mengenlehre. In ihrem Fall scheinen, um einen Ausdruck Kurt Gödels zu benutzen, uns die Axiome in einer Weise ›aufgezwungen‹ zu sein (»forced on us« heißt es bei Gödel), die sie nicht wie konventionelle Festlegungen wirken lässt, sondern eher wie evidente Wahrheiten über eine eigenständige mathematische Welt. Andererseits drängt sich jedoch der Gedanke auf, dass die Axiome der Arithmetik und Mengenlehre vielleicht lediglich die *Bedeutung* der Begriffe »Zahl« und »Menge« bestimmten, wodurch sie dann doch wieder wie ›Festlegungen‹ erscheinen (wenn auch nicht wie ›konventionelle‹). Erneut treffen wir hier auf eine für die Philosophie der Mathematik so charakteristische Art des Schillerns zwischen verschiedenen Sichtweisen, die uns auf den Sui-generis-Charakter des Mathematischen, hier also nun mathematischer Axiome, verweist, der jedoch schwer zu treffen ist.


Sammlung mathematischer Modelle im Göttinger Institut für Mathematik
Foto: Gisa Kirschmann-Schröder

Mathematische Notwendigkeit

Die Idee der ›Festlegung‹ der Axiome könnte nicht nur deswegen attraktiv erscheinen, weil sie Fragen nach der ›Evidenz‹ der Axiome aus dem Weg zu gehen erlaubt, sondern auch, weil sie uns vielleicht den Weg weist zu einem besseren Verständnis mathematischer Notwendigkeit, also jenes charakteristischen ›Müssens‹, wie es uns im Falle von »$1/3$ = 0,333…« – die Dreien in 0,333… *müssen* endlos wiederkehren – und auch ansonsten in der Mathematik durchgängig begegnet. Im Falle von Axiomen könnte man nun immerhin sagen, dass es das ›Müssen‹ sei, das der bindenden Kraft einer Festlegung entspringt, so wie auf unseren Straßen alle

Autos rechts fahren müssen, weil wir es so festgelegt haben. Dieser Gedanke ist allerdings nicht so ohne Weiteres tragfähig, da er nicht die notwendige Gültigkeit der Theoreme und nicht das notwendige Sichwiederholen der Drei in der Dezimalentwicklung von $1/3$ erklärt, etc. Natürlich folgen die Theoreme notwendig aus den Axiomen, und wir können, um die Notwendigkeit dieses Folgens zu erfassen, Folgerungsregeln formulieren, die wir als Festlegungen ansehen mögen, aber dann bleibt weiterhin (worauf schon Lewis Carroll in seiner Geschichte von Achilles und der Schildkröte hingewiesen hat) klärungsbedürftig, aufgrund welcher Art von Notwendigkeit nun aus ihnen etwas folgt.

Die Klärung des Charakters mathematischer Notwendigkeit gehört zu den schwierigsten Aufgaben der Philosophie der Mathematik. Wittgenstein hat die extravagante Auffassung vertreten, bei mathematischen Sätzen handle es sich im Normalfall überhaupt nicht um deskriptive Aussagen, die mathematische Tatsachen beschreiben, sondern um Regeln des mathematischen Redens, auf die wir uns übereinstimmend einigen, entweder indem wir sie als Axiome festlegen (»Wir wollen uns darauf einigen, dass durch jeden Punkt P außerhalb einer Geraden g genau eine Gerade h geht, die g nicht schneidet«, etc.) oder indem wir uns auf dem Weg über eine Rechnung oder einen Beweis auf sie verpflichten lassen. Wer demnach aufgrund entsprechender Rechnung sagt: »$1/3 = 0{,}333\ldots$«, der äußert nach Wittgenstein eine Regel, die er nun für bindend erachtet – und genau darin läge die ›mathematische Notwendigkeit‹! Diese Auffassung hat jedoch mit vielen Problemen zu kämpfen (müssen wir zum Beispiel nicht, damit sie funktioniert, vorweg beweisen, dass das zugrunde liegende Axiomensystem konsistent ist, womit aber Spannungen mit Gödels zweitem Unvollständigkeits-Theorem vorprogrammiert sind?), und sie bedarf genauerer Untersuchungen, die ein sensibles Eingehen auf viele Einzelheiten unserer mathematischen Praxis erfordern.

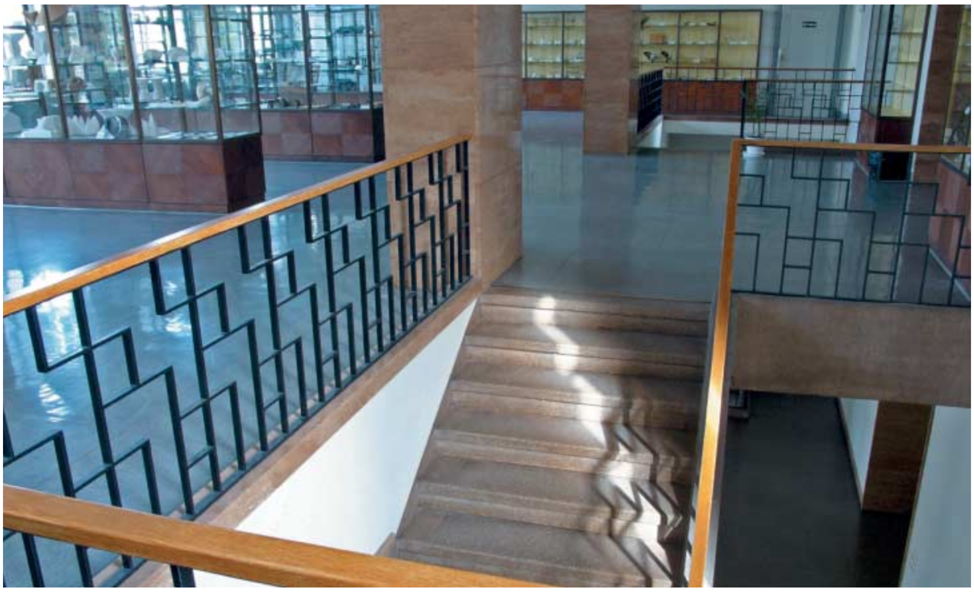
Büste von David Hilbert (1862 – 1943) in der Halle des Mathematischen Instituts
Fotos: Gisa Kirschmann-Schröder

Formalismus und das Unendliche

Wittgensteins Auffassung stellt mit dem Gedanken, dass mathematische Sätze nicht-deskriptiver Natur seien, eine These in den Raum, die für den Formalismus in der Philosophie der Mathematik kennzeichnend ist. Formalisten – genauer: so genannte Spiel-Formalisten – fassen die Mathematik als regelgeleitetes Spiel mit Zeichen auf, wobei sie von der Analogie mit dem Schachspiel inspiriert werden, dessen Figuren sozusagen die ›Zeichen des Schach‹ sind, mit denen gemäß der Schachregeln umgegangen wird. Ähnlich, so der formalistische Gedanke, gehen Mathematiker mit ihren Zeichen um, und so, wie es keinen Sinn hat zu fragen, worauf sich etwa der Läufer im Schach bezieht und was eine Schachstellung beschreibt, hat es dann auch keinen Sinn zu fragen, worauf sich die Zeichen der Mathematik beziehen und was die mathematischen Sätze beschreiben. Diese Auffassung hat ihre Stärken: Sie wird insbesondere den rechnerischen Zügen der Mathematik gerecht, entspricht jedoch keineswegs der mathematischen Praxis insgesamt und schlägt vor allem den Erfahrungen praktizierender Mathematiker ins Gesicht, die mit ihren Zeichen jenseits aller formalen Manipulationen mathematische Inhalte verbinden, die dem Zeichenspiel überhaupt erst Sinn geben. Die Klärung dessen, was hier »Inhalt« genannt werden kann, ist jedoch äußerst schwierig, und man gerät erneut in die Situation des Schillerns, nun zwischen Formalistischem und Nichtformalisti-schem, in der eine angemessene Position erst noch gefunden werden muss.

Hilbert entwickelte in seinem mathematischen Grundlegungsprogramm eine eigene formalistische Konzeption von Mathematik (die hier nicht genauer beschrieben werden kann), um damit das Unendliche zu bändigen, mit dem man, in den verschiedensten Ausprägungen, in der Mathematik ständig umgeht, das jedoch zugleich die Gefahr von Inkonsistenzen heraufbeschwört. In seinem tiefsinnigen Vortrag »Über das Unendliche« aus dem Jahr 1925 ruft er mit heute undenkbarem Pathos aus, »dass die endgültige Aufklärung über das Wesen des Unendlichen weit über den Bereich spezieller fachwissenschaftlicher Interessen vielmehr zur Ehre des menschlichen Verstandes selbst notwendig geworden« sei. Hilbert hoffte, im Rahmen einer Auffassung der Mathematik als Zeichenspiel strenge Konsistenzbeweise führen zu können – eine Hoffnung, die durch Gödels zweites Unvollständigkeits-Theorem jedoch zunichte gemacht wurde, sodass uns das Unendliche in der Mathematik weiterhin relativ ungebändigt, ungebändigt jedenfalls gemessen an Hilberts ursprünglichen Standards, entgegentritt. Hermann Weyl ging so weit, die Mathematik als »die Wissenschaft vom Unendlichen« zu bezeichnen. Selbst wenn der in dieser Charakterisierung liegende, prima facie vielleicht überraschende Ausschließlichkeitsanspruch berechtigt sein sollte, bliebe für die Philosophie im Hinblick auf das Unendliche trotzdem noch viel zu tun, denn wir sollten eine Antwort auf die Frage finden, wie wir Menschen mit unseren begrenzten Fähigkeiten es denn schaffen, Unendliches einzufangen. An dieser Stelle liegt vielleicht, angeleitet durch Hilberts Vorreitertum, für die Philosophie erneut eine Position mit deutlicher Verwandtschaft zum Formalismus nahe, denn zur Beantwortung jener Frage sollte unser Umgang mit den *Zeichen* für Unendliches im Vordergrund stehen und nicht ›Unendliches selbst‹. Ausgesprochen schwierig daran ist erneut, eine solche Art von Verwandtschaft zum Formalismus zu finden, der die Inhalte mathematischer Sätze nicht völlig zum Opfer fallen.

Im Zusammenhang mit dem Unendlichen drängt sich auch die schon weiter oben im Falle der nicht-euklidischen Geometrien aufblitzende Frage auf, ob die Gegenstände, und auch die entsprechenden Sachverhalte, der Mathematik *entdeckt* oder *erfunden* werden. Sind die bis in schwindelerregende Höhen aufsteigenden Unendlichkeiten der Mengenlehre Entdeckungen oder Erfindungen? Wittgenstein schreibt ganz unverblümt: »Der Mathematiker ist ein Erfinder, kein Entdecker«. Diese plakative Aussage wird jedoch Wittgensteins eigenem skrupulösen und differenzierten Philosophieren nicht gerecht, und es erscheint viel lohnender, diejenigen Züge der Mathematik, die Ähnlichkeiten mit dem Erfinden, und diejenigen, die Ähnlichkeiten mit dem Entdecken haben, aufzuspüren und zu unterscheiden, um dann, ohne sich der einseitigen Betonung nur dieses oder jenes Zuges schuldig zu machen, ein angemesseneres Bild der Mathematik zu gewinnen. Sind die komplexen Zahlen entdeckt oder erfunden worden? Hat man die Wahrheit von Fermats letztem Theorem entdeckt, oder steckt nicht auch darin eine große Portion Erfindung? Solche Fragen sind schwer zu beantworten und verlangen differenzierte philosophische Herangehensweisen.



Treppenaufgang im Mathematischen Institut mit Blick auf die Sammlung mathematischer Modelle
Foto: Gisa Kirschmann-Schröder

Empirische Anwendbarkeit und menschliche Gestalt

Die bisherigen Betrachtungen betrafen überwiegend die reine Mathematik unter völligem Absehen von ihren Anwendungen. Es ist jedoch ein eminent wichtiges Merkmal der Mathematik, dass sie empirische Anwendungen besitzt und bei ihrer Anwendung auch so überaus erfolgreich ist. Dieser Erfolg mutet im Falle elementarer Mathematik, die historisch aus der Anwendung ja erwachsen ist, vielleicht wenig erstaunlich an, aber sie erscheint geradezu als ein Wunder im Falle fortgeschrittener Mathematik, wie sie im Laufe der Geschichte, von Rücksichtnahmen auf die Anwendung immer weiter sich entfernend, dann entstanden ist. (An dieser Stelle müssen wir uns auch in der Philosophie der Mathematik schließlich doch in höhere mathematische Gefilde begeben!) Bei der ursprünglichen Entwicklung vieler fortgeschrittener mathematischer Theorien ist an empirische Anwendungen zunächst überhaupt nicht gedacht worden – und doch haben sich diese Anwendungen dann mit verblüffendem Erfolg tatsächlich eingestellt. (Ein besonders eindrucksvolles Beispiel ist die Anwendung der Theorie der Hilbert-Räume in der Quantenmechanik.) Dies ist fast so, als würden wir eines Tages entdecken, dass gewisse Gesetzmäßigkeiten der Quantenwelt den Regeln des Schach genügen, so dass man nun durch Schachspielen zu physikalischen Vorhersagen kommen kann. Die heikle philosophische Aufgabe besteht an dieser Stelle darin, das Unverstandene dieses Phänomens herauszuarbeiten, den Sinn für die *wunderbare prästabilierte Harmonie* zwischen reinem Denken und empirischer Wirklichkeit wach zu halten, gegen unsere Tendenz, sie wegrationalisieren zu wollen durch Erklärungen, die sich am Ende doch nur als Scheinerklärungen erweisen.

Die besondere Schwierigkeit der Philosophie der Mathematik liegt nun darin, dass all die genannten Probleme, und andere ungenannte mehr, sich so vielfältig überkreuzen und die jeweils vorgeschlagenen Lösungen in solch vertrackten gegenseitigen Abhängigkeitsverhältnissen stehen, wie dies in wohl keinem anderen Gebiet der Philosophie der Fall ist. Angesichts dieser Sachlage lautet die wichtigste Einsicht, dass die Suche nach einem *einheitlichen Wesen* der Mathematik aufgegeben werden sollte, auch wenn die Mathematik selbst uns zu solch einer Suche vielleicht verleitet.

Kant beispielsweise lokalisierte ihr Wesen in der ›Konstruktion in reiner Anschauung‹, Frege und Russell sahen es in der Logik, deren Nachfolger in der Mengenlehre. Solche Vereinheitlichungsprogramme können mathematisch interessant sein, aber vom Standpunkt der Philosophie der Mathematik sind sie Phantastereien, die uns über die Buntheit der tatsächlichen, lebendigen mathematischen Praxis, über die Vielfalt verschiedenartigster mathematischer Begriffsbildungen, Ideen und Beweistechniken hinwegtäuschen. Frege wollte mit seiner vereinheitlichenden ›Begriffsschrift‹ den in der Mathematik liegenden gedanklichen Inhalt in Reinform herausdestillieren, im Gegensatz zum, wie er glaubte, diesen Inhalt verhüllenden symbolischen Wildwuchs unserer normalen Praxis. In Wirklichkeit ist es jedoch so, dass, wie Wittgenstein bemerkt, gerade die Fregeschen und andere Vereinheitlichungen »die wichtigen Formen des Beweises gleichsam bis zur Unkenntlichkeit ein[hüllen], wie wenn man eine menschliche Gestalt in viele Tücher wickelt«. Philosophie der Mathematik sollte die ›menschliche Gestalt‹ der Mathematik begreifen lehren; oder weniger metaphorisch gesprochen: die Gestalt, in der uns in der Mathematik der vielfältig und lebendig sich äußernde menschliche Geist entgegentritt. Kant, der doch die Frage, was der Mensch sei, selbst ins Zentrum der Philosophie rückte, hat, wie auch viele andere Philosophen, allzu oft vergessen, dass der Mensch ein lebendiges Wesen ist, und in der Philosophie der Mathematik mag die Neigung zu solcher Vergesslichkeit besonders groß sein. Aber auch in unserer Praxis der Mathematik zeigt sich dieses Leben, allerdings auf eine Weise, die sich der getreuen Beschreibung ständig widersetzt. Auch deswegen ist das Philosophieren über Mathematik so schwer.

Why is philosophizing about mathematics so hard? A bad reason which one might be tempted to give is that it's so hard because mathematics itself is so hard. But this can barely be true since many of the most fundamental questions in the philosophy of mathematics – questions, e.g., about the apriority of mathematical knowledge, about mathematical necessity, about the formal character of mathematics, even about infinity – can be treated already at a very elementary level of mathematics. Another bad reason points to the abstract nature of the objects of mathematics which, supposedly, prevents them from being integrated into a scientific world-view. This, again, is not a convincing answer since abstractness per se is nothing specific to the objects of mathematics; on the contrary, reference to abstract objects pervades our speech in its entirety.

Good answers turn up if we recognize that the language of mathematics shows on its surface so many similarities with the language of the empirical sciences that one is all too easily led into taking these similarities at face value, which, however, generates far-reaching errors and misconceptions. Instead, mathematics should be understood as an activity that is sui generis, that should not be seen as being in line with other human activities, and precisely this is one of the fundamental difficulties with our philosophizing about mathematics. The sui generis character of mathematics already becomes immediately evident when we try to decide whether mathematics belongs to the natural sciences or to the humanities. Of course, it belongs to neither – it is not even *called* a »science« – and we have to understand it in its specific solitariness.

Mathematical knowledge is *non-empirical* (»a priori«) knowledge which normally relies on proofs. But the nature of proofs is hard to grasp, and the same is true of the nature of the axioms on which proofs are based. One might think that a proof is simply a road to the truth of the proposition proved, that a proof ›verifies‹' the proposition, but our most natural conception of mathematical truth is in terms of certain structures which make the proposition true, and this conception radically uncouples truth from our actually practised methods of proof, such that the connection between truth and proof gets lost. (This is what philosophers call the *Truth/Proof problem.*) Confronted with this difficulty one might take refuge in the view that the proof of a mathematical sentence bestows *sense* upon the sentence. But this cannot be correct either because in many cases we do have a considerable understanding of a mathematical sentence even if we are ignorant of its proof; furthermore, we are normally unwilling to diagnose, as this view of proofs would suggest a change of sense when we find a new proof of a proposition already proven (which occurs rather often in mathematics). As for the axioms, according to modern tendencies one might be inclined to treat them as ›stipulations‹ or ›agreements‹

which ›implicitly define‹ the mathematical structures which one wants to talk about, but this view does not seem to be appropriate in case of the standard axioms of arithmetic and set theory which actually appear to be (as Gödel put it) ›forced on us‹ and therefore far away from being stipulated. In sum, we are in trouble when trying to understand the nature of the apriority characteristic of mathematical knowledge.

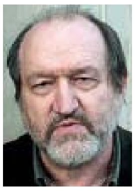
Despite its weaknesses, the idea of a ›stipulation‹ might nonetheless be operative in understanding *mathematical necessity*, another important trait of mathematics. Perhaps it is the sort of necessity brought about by stipulation? This idea might work for axioms, and also for the rules of inference which we have explicitly formulated, but it does not tell us anything about the way in which these axioms and rules bestow necessity upon the theorems proved. Wittgenstein had the radical idea of considering all mathematical propositions, axioms *and* theorems, not as descriptive statements but as *rules* of our mathematical language. Thus, according to him, mathematical necessity would be the necessity of rules (»The bishop in chess *must* move diagonally.«). This view, however, is beset with difficulties and needs thorough elaboration.

To consider mathematical sentences as non-descriptive ones is a trademark of *formalism.* Formalists see mathematics as a game with signs, in analogy to chess which is a game with chess pieces. And as it does not make sense to ask what a position in chess ›describes‹, the analogous question does not make sense, according to formalism, with respect to mathematical sentences either. This view has its merits, but it contradicts the non-algorithmic traits of our mathematical practice and the experiences of mathematicians who insist on using most of their sentences *with* descriptive content. The difficulty here consists in giving an account of this ›mathematical content‹ without too much assimilating it to the descriptive content of empirical propositions.

Hilbert developed his own brand of formalism in order to tame the mathematical infinite, which threatened to lead into inconsistencies. His brilliant idea was to consider mathematical theories as ›formula games‹ in order to be able, then, to give purely combinatorial proofs of their consistency. Although this project failed because of Gödel's Second Incompleteness Theorem, it remains of philosophical interest as it directs our attention to the use of our signs, and especially the signs we invent to refer to mathematical infinities, which we should in fact concentrate on when pondering the philosophical question of how we finite human beings are able to capture the infinite. Maybe mathematicians do not *discover* infinite objects but *invent* them? The question whether, not only with respect to infinite objects but to many others as well, mathematicians are discoverers or inventors is a vexed one which, again, challenges us to give differentiated descriptions of the sui generis nature of mathematics.

In addition to the characteristics already mentioned, one further eminently important one is the empirical applicability of mathematics and the overwhelming success of such applications even in cases of very abstract mathematical theories which prima facie seem very remote from the empirical world. The philosophical task here consists in keeping alive our sense of wonder about this pre-established harmony between pure thinking and empirical reality without trying to rationalize it away.

This thicket of criss-crossing problems makes the philosophy of mathematics especially hard, and it should stop us searching for a *uniform essence* of mathematics. Mathematics expresses itself in a practice full of varied life which should not be suffocated in uniformity. It is extremely difficult, however, to give adequate descriptions of this life.



Prof. Dr. Felix Mühlhölzer, Jahrgang 1947, studierte Mathematik und Physik an den Universitäten Mainz, Bonn und Heidelberg, mit Mathematik-Diplom bei Albrecht Dold über »Garbenkohomologie und Čech-Kohomologie« im Jahr 1975. Nach einem Zweitstudium Philosophie in München wurde er 1982 bei Wolfgang Stegmüller über den Zeitbegriff in der Relativitätstheorie promoviert und habilitierte sich 1989 an der Universität München über Thomas Kuhns Begriff der Inkommensurabilität. Nach einem Aufenthalt am Zentrum für interdisziplinäre Forschung der Universität Bielefeld als Mitglied der Forschergruppe »Semantical Aspects of Spacetime Theories« in den Jahren 1992/93 war er bis 1997 Professor für Wissenschaftstheorie und Logik an der Technischen Universität Dresden und ist seitdem Professor für Philosophie an der Universität Göttingen. Seine Arbeit liegt schwerpunktmäßig in der Wissenschaftsphilosophie, insbesondere der Philosophie der Mathematik und Physik, umfasst jedoch auch Erkenntnistheorie, Sprachphilosophie und Philosophie des Geistes. Er orientiert sich dabei an der Spätphilosophie Wittgensteins und forscht seit vielen Jahren, gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft, über die noch weitgehend unerschlossene Philosophie der Mathematik des späten Wittgenstein.

Foto: Gisa Kirschmann-Schröder

Hochburg der Mathematik

Die Göttinger Mathematik und ihre Protagonisten

Benno Artmann

Als weltweit führendes Zentrum der Mathematik konnte sich Göttingen in der Zeitspanne von 1895 bis 1933 etablieren. Insbesondere durch vertrauensvolle und unbürokratische Zusammenarbeit von Felix Klein mit dem preußischen Ministerialdirektor Friedrich Althoff, wozu Klein auch noch die Unterstützung der Industrie gewinnen konnte, wurde Göttingen zum Mekka der Mathematik. In Göttingen kamen damals die kreativsten Mathematiker ihrer Zeit zusammen – unter ihnen der herausragende David Hilbert –, um in einer Atmosphäre regen und freien wissenschaftlichen Austausches mit ihren Arbeiten die Mathematik des 20. Jahrhunderts zu gestalten. Im Folgenden stellt Prof. Dr. Benno Artmann, der sich seit seiner Emeritierung in Darmstadt intensiv mit der Göttinger Geschichte der Mathematik befasst hat, einige prominente Akteure vor.

Um die Zeit der Gründung der Georg-August-Universität Göttingen 1737 gab es in Deutschland kaum kreative Mathematiker, vielleicht einmal abgesehen von dem Schweizer Mathematiker Leonard Euler (1707 – 1783), der ab 1741 an der Akademie in Berlin lehrte und forschte. Auch die ersten Professoren für dieses Fach in Göttingen waren gleichzeitig Physiker, oder, besser gesagt, in heutigem Sinn Ingenieure. Mit der Berufung von Abraham Gotthelf Kästner im Jahr 1756 kam dann ein Mathematiker nach Göttingen, der zumindest durch seine Lehrbücher eine außerordentliche Breitenwirkung erreichte, wobei auch er in gleichem Maße wie als Mathematiker als Literat tätig war. Die Situation änderte sich schlagartig mit der Berufung des genialen Mathematikers und Astronomen Carl Friedrich Gauß im Jahr 1807.

Bissiger Satiriker und Verfasser mathematischer Lehrwerke: Abraham Gotthelf Kästner

Beginnen möchte ich in der Vorstellung einer Reihe bedeutender Göttinger Mathematiker mit Abraham Gotthelf Kästner (1719 – 1800). Kästner kam 1756 aus Leipzig als Professor der Mathematik nach Göttingen. Neben seinen mathematischen Arbeiten war er eine der Hauptfiguren der Aufklärung in Deutschland. In der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts war die mathematische Lehrbuchliteratur dominiert von Christian Wolff (1679 – 1754), dessen Werke um 1760 abgelöst wurden von den zahlreichen Büchern Kästners, die in vielen Auflagen bis um 1800 meist beim Verlag Vandenhoek (und Ruprecht) in Göttingen erschienen. Ihr Inhalt reicht von einfachen Übungen zur Feldmesskunst bis hin zur »Analysis des Unendlichen«, womit die Differential- und Integralrechnung bezeichnet wird. Insbesondere die in der Feldmesskunst enthaltene Ballistik wurde von zukünftigen Artillerieoffizieren besucht. Aus dem damals zu England gehörenden Königreich Hannover gingen viele dieser Studenten später nach Nordamerika und kämpften im Unabhängigkeitskrieg 1775 bis 1783.

Trotz seiner stark auf die Anwendungen hin orientierten Vorlesungen betont Kästner immer wieder den Charakter der Mathematik als Vorbild der Wissenschaften. So fragt er etwa: »Wie kommt es, dass alle Lehrer der Arithmetik und Geometrie über alle Sätze vollkommen einig sind? Von keinen anderen Teilen der Gelehrsamkeit lässt sich dieses weiter sagen, da in ihnen überall, nicht über Kleinigkeiten, sondern ... über die wichtigsten Dinge gestritten wird.« Ironisch vergleicht er *gewisse Leute, die nur auf Anwendungen sehen, mit kleinen Kindern, die nur interessiert, was man in den Mund stecken kann.*

Berühmt und gefürchtet war Kästner für seine satirischen Epigramme, wie das folgende über seine Göttinger Professorenkollegen:

Georg Augustens Professoren,
Das ist nun einmal hergebracht,
Sind, sammt und sonders
Wohlgebohren,
Doch manche sind nicht:
Wohlgemacht.

Für den allgemeinen Bekanntheitsgrad, aber auch die ironische Beurteilung Kästners in den intellektuellen Zirkeln seiner Zeit sei noch der Philosoph Immanuel Kant in einem Brief vom 27. September 1791 zitiert: *»... ich bin teils durch eigene Erfahrung, teils, und weit mehr, durch das Beispiel der größten Mathematiker überzeugt, dass die bloße Mathematik die Seele eines denkenden Mannes nicht ausfülle, dass noch etwas anderes und wenn es auch, wie bei Kästner, nur Dichtkunst wäre, sein muss, was das Gemüt durch Beschäftigung der übrigen Anlagen desselben teils nur erquickt, teils ihm auch abwechselnde Nahrung gibt.«*

Zum Schluss noch einmal Kästner selbst: Er schrieb laut Vorwort seine »*Geschichte der Mathematik*« auch, um »zugleich die Dichter, die vor der Mathematik fliehen

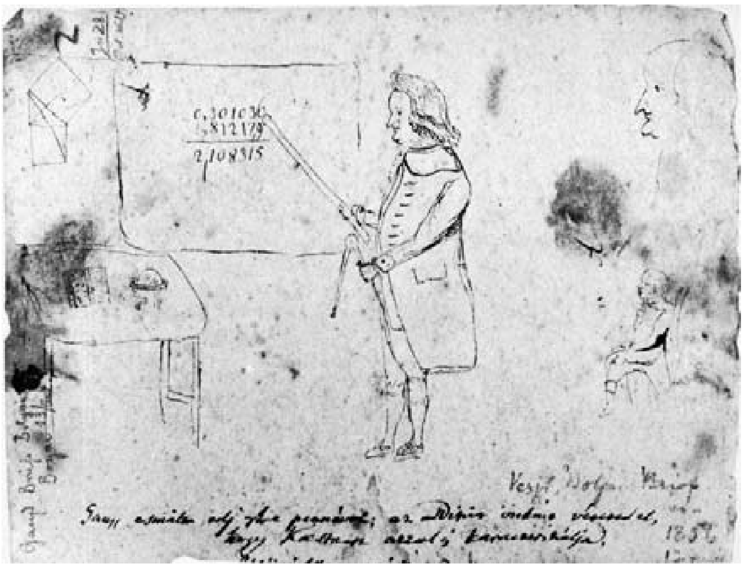
Abraham Gotthelf Kästner (1719 – 1800)

Kurze Zwischenbemerkung über Primzahlen

Mehrere Göttinger Mathematiker haben einen beträchtlichen Teil ihrer Forschungen den Primzahlen gewidmet. Primzahlen sind Zahlen, die nur durch sich selbst und 1 teilbar sind, wie etwa 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... , 127, ... (1 gehört nicht dazu!) Der aus der Antike stammende Name »Primzahl« (numerus primus) bedeutet nichts anderes als »erste Zahl«, weil sie im Einmaleins immer nur an erster Stelle stehen und nie als Vielfache vorkommen können. Schon Euklid (um 300 v. Chr.) bewies, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Die Verteilung der Primzahlen unter den gewöhnlichen Zahlen wird in ständig neuen Anläufen erforscht. Ziemlich leicht kann man sehen, dass es beliebig lange »Strecken« von Zahlen gibt, von denen keine einzige eine Primzahl ist. Andererseits tauchen immer mal wieder so genannte Zwillinge von wie Frauenzimmer vor Maus und Frosch, zu belehren«.

Genialität und Weltruhm: Carl Friedrich Gauß

Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) kam in den Jahren von 1795 bis 1798 als Student und später von 1807 bis 1855 als Direktor der Sternwarte nach Göttingen. Gauß gehört zusammen mit Archimedes (um 290 – 212 v. Chr.) und Newton (1643 – 1727) zu den drei größten Mathematikern aller Zeiten. Seine *»Disquisitiones arithmeticae«*, die »Zahlentheoretischen Untersuchungen«, von 1801 sind eines der bedeutendsten Werke in der Geschichte der Wissenschaften. Mit diesem Buch stand Carl Friedrich Gauß im Alter von nur 24 Jahren in der ersten Reihe der Mathematiker. Gauß sagt in der Einleitung, dass sich die Drucklegung vier Jahre hingezogen habe. Folglich hatte er das Werk bereits 1797, mit 20 Jahren, im Wesentlichen fertiggestellt. Aus seiner Studienzeit ist eine von ihm gezeichnete Karikatur seines Professors Kästner überliefert. Neben der fehlerhaften Addition sollte man auch die Beweisfigur zum Satz von Pythagoras oben links beachten. Sicher konnte der Student Gauß nicht mehr viel von Kästner lernen. Um einen kleinen Eindruck von den *Disquisitiones* zu bekommen, betrachten wir nur



Von Carl Friedrich Gauß gezeichnete Karikatur, die seinen Lehrer Kästner zeigt. Neben der fehlerhaften Addition beachte man die Beweisfigur zum Satz des Pythagoras oben links. Abbildung: Handschriftenabteilung der SUB Göttingen

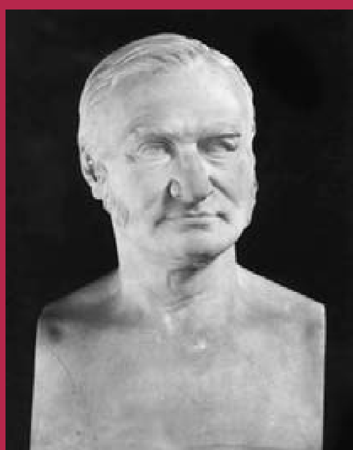
zwei leicht zugängliche seiner Theoreme, ein arithmetisches ganz vom Anfang und ein geometrisches vom Ende des Buches:

Schon in den *Elementen* Euklids (um 300 v. Chr.) steht, dass man jede Zahl in unzerlegbare Faktoren, eben in *Primzahlen* zerlegen kann, wie etwa 30 = 2 x 3 x 5 oder auch eventuell 17 = 17, weil 17 selbst eine Primzahl ist. Was man nie hinterfragt hatte, war, ob eine solche Zerlegung etwa auch für sehr große Zahlen (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) nur auf eine Art möglich sei. (Man soll diese Frage nicht einfach beiseite schieben. Sogar für gewöhnliche Zahlen wie 1 = 0,9999... gibt es verschiedene Darstellungen.) Nehmen wir als Beispiel eine von dem Philosophen Platon (428 – 348) wegen ihrer vielen Faktoren bevorzugte Zahl (Gesetze 738a):

5040 = 2 x 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 5 x 7

Warum können hier nur die Faktoren 2, 3, 5, 7 und diese auch nur in der gegebenen Anzahl, vorkommen? Warum wäre dies auch etwa für eine beliebige 10.000-stellige Zahl, für die niemand eine Primfaktorzerlegung explizit angeben kann, immer richtig? Offenbar hat man das vor Gauß einfach geglaubt. Als eines seiner allerersten Theoreme in den *Disquisitiones* beweist Gauß: Satz 16. *Jede zusammengesetzte Zahl lässt sich* (bis auf die Reihenfolge) *nur auf*

Primzahlen auf wie 17, 19 oder 137, 139, also Primzahlen im Abstand zwei. Bis heute ist aber nicht bekannt, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt. Ein im Jahr 2004 von Ben Green und Terence Tao bewiesenes sensationelles Ergebnis, das mit der Fields-Medaille, dem »Nobelpreis der Mathematiker«, ausgezeichnet wurde, ist folgendes: Eine arithmetische Folge ist eine Reihe von Zahlen in festem Abstand voneinander, wie etwa 5 – 11 – 17 – 23 – 29 mit dem Abstand 6. Die hier genannten Zahlen sind alle Primzahlen, aber die nächste der Reihe mit Abstand 6 wäre 35, keine Primzahl. Das Green-Tao-Theorem sagt nun: Es gibt unter den Primzahlen arithmetische Folgen von beliebiger endlicher Länge (aber keine von unendlicher Länge).



Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855)

eine einzige Weise in Primfaktoren zerlegen. Ganz gleich, wie groß und unzugänglich die betreffende Zahl auch sein mag.

Zu unserem zweiten Beispiel: Am Ende der *Disquisitiones* greift Gauß ein Thema auf, das er als Schlüsselerlebnis kurz vor seinem 19. Geburtstag in seinem Tagebuch festhält: Er findet für das regelmäßige 17-Eck (oder die Teilung eines Kreises in 17 gleiche Teile) eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal. Das regelmäßige Sechseck kann jedes Kind konstruieren, wenn es mit dem Zirkel spielt. Durch Euklid, der auch die zulässigen Konstruktionsmittel fixiert hat, ist uns überliefert, dass den Schülern des Pythagoras (ca. 570 – 490 v. Chr.) die Teilung des Kreises in 3, 4, 5, 15 (und 8, 10, 12, 16 ...) gleiche Teile gelungen war. Gauß setzt erneut bei Euklid an und macht einen gewaltigen Schritt vorwärts, wie er selbst in Artikel 365 der *Disquisitiones* betont. Erstens gibt er an, für welche Primzahlen p wie 3, 5, 17, 257, 65.537 die Kreisteilung (das p-Eck) konstruierbar ist, und wie man durch einfache Winkelhalbierungen und Kombinationen weiter kommen kann. Zweitens beweist er, dass für Zahlen wie 7, 9, 11, ... die Kreisteilung mit Zirkel und Lineal nicht möglich ist. Das hat zum Beispiel zur Folge, dass ein Winkel von 40 Grad, wie er bei einer Teilung von 360 Grad in neun gleiche Teile auftreten würde, niemals exakt genau konstruiert werden kann. Übrigens hat man über die von Gauß oben genannten fünf Primzahlen keine anderen der von ihm bestimmten Art gefunden. Die Suche ging per Computer bis zu Zahlen von etlichen Milliarden Dezimalstellen. So weiß man bis heute nicht, ob noch weitere Kreisteilungen theoretisch exakt mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind.

Nach diesem Frühwerk hat sich Gauß vielen anderen Gebieten der reinen und angewandten Mathematik, der Astronomie und Physik gewidmet. Hier soll nur noch auf die von ihm zusammen mit dem Physiker Weber erfundene erste elektrische Nachrichtenübertragung verwiesen werden, er ist also sozusagen auch der Urvater des Telefons und anderer heute alltäglichen Dinge. Auf die weitere Entwicklung seiner Theorie der Planetenbewegung wird an anderer Stelle hingewiesen. Trotz dieser vielfältigen Aktivitäten hing sein Herz doch immer an der reinen Mathematik, wie aus einer Bemerkung in einem seiner vielen unveröffentlichten Manuskripte hervorgeht: *»Es gibt immer Leute, die von der Erhabenheit der ewigen Wahrheiten und ihrer göttlichen Schönheit nichts wissen und daher den Wert mathematischer Untersuchungen nur nach ihrer Verwendbarkeit in den Gebieten der angewandten Wissenschaften einzuschätzen gelernt haben; die obigen Entwicklungen werden den Nutzen haben, diesen Leuten unsere Untersuchungen angenehmer zu gestalten. In der Tat ist allgemein bekannt, von wie großem Nutzen eine so rasch konvergierende Entwicklung, wie die aus den obigen Sätzen entspringende, in der physikalischen Astronomie oder der Theorie der Planetenstörungen ist«.* (C.F. Gauß: Nachlass zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels und der Modulfunktionen)

Mathematische Juwelen: Peter Gustav Lejeune Dirichlet

Nach dem Tod von Gauß kam Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859) als dessen Nachfolger nach Göttingen. Gauß selbst hatte bereits 1832 überlegt, ihn für Göttingen zu gewinnen. Nun war der Kandidat damals aber gerade mit Rebecca Mendelssohn, der jüngeren Schwester des Komponisten Felix Mendelssohn-

Das Gauß-Weber-Denkmal auf dem Göttinger Wall
Foto: Stadt Göttingen

Bartholdy, frisch verheiratet und gehörte dadurch zu einem der angesehensten Kreise von Kunst und Wissenschaft in Berlin. Da hielt sich der zartfühlende Gauß zurück und gönnte dem jungen Paar die glückliche Zeit in der High Society der Großstadt. Als sie dann doch 1855 nach Göttingen kamen, beklagte sich Rebecca anfangs etwas über die ungeschlachten Sitten der Göttinger Dienstboten, fand aber bald für die Familie ein passendes Heim in der Mühlenstraße 1, das heute mit einer Gedenktafel gekennzeichnet ist.

Obwohl die meisten mathematischen Ergebnisse Dirichlets sich einer kurzen Beschreibung entziehen, gibt es doch eine zentrale Erkenntnis über Primzahlen, die für jedermann zugänglich sein sollte. Vorweg sei gesagt, dass Dirichlet wohl der Erste war, der Gauß' monumentales Frühwerk *Disquisitiones arithmeticae* von 1801 schon als junger Mann vollständig verstanden hatte. Ein Zeitgenosse berichtet: *»So, wie gewisse Geistliche mit ihrem Gebetbuch herumziehen, pflegt Dirichlet nur in Begleitung eines ganz verlesenen, aus dem Einband gewichenen Exemplares der Disquisitiones auf Reisen zu gehen.«* Gauß selbst schreibt 1845 an Alexander von Humboldt über Dirichlet: *»... seine einzelnen Abhandlungen füllen noch gerade kein großes Volumen. Aber sie sind Juwelen, und Juwele legt man nicht auf die Krämerwaage.«*

Nun zu dem Theorem: Man versucht, in der rätselhaften Verteilung der Primzahlen unter allen Zahlen doch Regelmäßigkeiten zu entdecken, das große Thema aller Primzahlforscher. Geht man nun auf die Suche nach Primzahlen – Gauß tat das oft »im Kopf« bei seinen ihm manchmal langweiligen Vermessungsarbeiten –, so stellt man leicht fest, dass gerade Zahlen (außer 2 selbst) keine Primzahlen sein können, ebenso wenig Zahlen, die auf 5 enden (wieder außer 5 selbst). Bleiben also nur Zahlen mit den Endziffern 1, 3, 7 und 9. Diese sind manchmal Primzahlen, manchmal nicht. Dirichlet hat darüber bewiesen: *Auf lange Sicht verteilen sich die unendlich vielen Primzahlen völlig gleichmäßig auf die vier möglichen Typen.* Es kommt aber noch besser: Wenn man die letzten zwei Endziffern einer Zahl berücksichtigt, also von 01, 03, ... bis 99, so gibt es 40 mögliche Typen, und wieder herrscht gleichmäßige Verteilung. Geht man noch weiter zu drei Endziffern, so gibt es 400 gleichmäßig besetzte Typen – und so fort. Es mag einem schwindlig werden, aber so ist es, Dirichlet hat es bewiesen. Und, wie schon Kästner betont hat, da gibt es dann keine Diskussion mehr.

Geometrie mit Folgen: Bernhard Riemann

Als Nachfolger von Dirichlet wurde der schon in Göttingen tätige Bernhard Riemann (1826 – 1866) im Jahre 1859 berufen. Er hatte schon hier bei Gauß und in Berlin bei Dirichlet studiert. Gauß war von der Dissertation und besonders von Riemanns Habilitationsvortrag 1854 tief beeindruckt. Riemann entwarf dabei die Grundideen der so genannten *Riemannschen Geometrie*, welche später unter anderem für die Relativitätstheorie wichtig wurde und weitreichende Folgen bis heute hat.

In einer nur acht Seiten langen Arbeit zur Zahlentheorie entwickelte Riemann 1859 ganz neue Ideen bezüglich der Verteilung der Primzahlen unter den gewöhnlichen Zahlen. Er zeigte, dass man den Schlüssel zu vielen dahin gehörigen Problemen in der Hand hat, wenn man die Nullstellen einer heute *Riemannsche Zeta-Funktion* genannten Funktion genau kennt. Seine Vermutung über die Lage dieser Nullstellen, die sprichwörtliche »Riemannsche Vermutung« (Riemann hypothesis) ist heute das größte ungelöste Problem der Mathematik.

David Hilbert würdigte in einer seiner Vorlesungen Riemanns Arbeit von 1859 mit den Worten: *»... dass wohl selten eine Abhandlung von solcher Kürze, Schärfe*

Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859)

Bernhard Riemann (1826 – 1866)

und Genialität aus der Feder eines Menschen geflossen ist, wie dieses Meisterwerk eines der größten Geister unserer Wissenschaft.«

Es gibt Mathematiker, die neben Archimedes, Newton und Gauß auch Riemann und Euler zu den größten aller Mathematiker zählen.

Mathematik anschaulich unterrichten: Alfred Clebsch

Nach dem Studium in Königsberg und Professuren in Karlsruhe und Gießen kam Alfred Clebsch (1833 – 1872) im Jahr 1868 nach Göttingen. Durch eine neue Interpretation gewisser Riemannscher Ideen schuf er das noch heute aktuelle Forschungsgebiet der algebraischen Kurven und Flächen, von denen die Kegelschnitte (Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln) die einfachsten Beispiele sind. Viele seiner Flächen sind als Gipsmodelle in der Sammlung des Mathematischen Instituts zu sehen.

Clebsch war ein begeisternder Lehrer. Unter seinen zahlreichen bedeutenden Schülern nennen wir nur Felix Klein, der sich 1871 bei ihm habilitierte. Das Sprachrohr seiner Schule waren die von ihm zusammen mit Carl Neumann gegründeten Mathematischen Annalen, lange Zeit eine der international führenden Zeitschriften in der Mathematik. Clebsch verstarb mit nur 39 Jahren als Rektor der Georgia Augusta an Diphtherie. Aus dem Nachruf in den Annalen zitieren wir: *»Der mathematische Unterricht, so wollte Clebsch, sollte von der Anschauung ausgehen, und durch die Anschauung Interesse erwecken. Das eben war bei seinen Universitätsvorträgen das Charakteristische: der Gegenstand des Vortrags erwuchs vor den Zuhörern in organischem Aufbau. Und das in seinem ganzen Wesen und Denken zu Tage tretende, selbst in seinen einzelnen Abhandlungen erkennbare Streben nach plastischer Darstellung und künstlerischer Abrundung gab seinen Vorträgen eine seltene Vollendung und Anziehungskraft, und verwandelte den Gegenstand des Vortrags in ein Bild von wahrhaft idealer Schönheit. Es war, im höchsten Sinne des Wortes, ein ästhetischer Genuss, seinem Vortrage zu folgen.«*

Ausbau mit Durchsetzungskraft und Weitsicht: Felix Klein

1886 kam Felix Klein (1849 – 1925) nach Professuren in Erlangen (bereits 1872), München und Leipzig nach Göttingen. Er galt um 1880 als *der* führende Mathematiker in Deutschland, der die genialen Ideen Riemanns ausarbeitete und einer breiten mathematischen Öffentlichkeit zugänglich machte. Klein war seit einem gemeinsamen Sanitätsdienst im deutsch-französischen Krieg 1870/71 mit dem Preußischen Kultusbeamten Friedrich Althoff befreundet. Dieser war bestrebt, in Göttingen einen Schwerpunkt in Mathematik und Physik an den Universitäten des Deutschen Reichs aufzubauen. Der Zusammenarbeit Kleins und Althoffs ist es zu verdanken, dass sich Göttingen mit den Berufungen von David Hilbert, Hermann Minkowski, Carl Runge, Edmund Landau und deren vielen hervorragenden Schülern in der Zeit von 1895 bis 1914 zu *dem* mathematischen Zentrum weltweit entwickelte.

Neben der reinen Mathematik waren Kleins Hauptanliegen der Ausbau der Verbindungen zwischen Mathematik, Naturwissenschaften und Technik sowie andererseits die Verstärkung der Verbindungen zur Schule. Im Auftrag des Preußischen Kultusministeriums fuhr er 1893 zur Weltausstellung nach Chicago, unter anderem, um die Praxis des Frauenstudiums in den USA zu erkunden. Seinen Schüler Rudolf Schimmack führte er 1911 zur ersten Habilitation für Mathematikdidaktik in Deutschland.

Auch die großartige Sammlung mathematischer Modelle, die man immer noch im Mathematischen Institut besichtigen kann, ist hauptsächlich auf Klein zurückzuführen. Nach dem Bau der Physikalischen Institute ab 1905 in der Bunsenstraße war auch schon das Grund-

Alfred Clebsch (1833 – 1872)

Diagonalfläche von Clebsch

stück für ein neues Mathematisches Institut gekauft, aber der Bau verzögerte sich wegen des ersten Weltkriegs und der folgenden Inflationszeit bis 1928/1929, so dass Felix Klein die Erfüllung dieses Wunschtraums nicht mehr erleben konnte.

Der Physik-Nobelpreisträger Max Born, der in den Jahren um 1905 Student der Mathematik und Physik in Göttingen war, beschreibt das Wirken Kleins in dieser Zeit mit folgenden Worten: »Klein umfasste nicht nur Mathematik als eine Einheit, sondern alle Naturwissenschaften. Durch seine machtvolle Persönlichkeit, unterstützt von einer schönen, männlichen Erscheinung, wurde er führend in der Fakultät und der ganzen Universität. Eine der wesentlichen Leistungen Kleins war die Schaffung einer mathematischen Schule ersten Ranges durch Berufung anderer Mathematiker von Weltruhm. Dass er dies tat ohne den leisesten Anfall von Eifersucht, ist der beste Beweis seiner menschlichen Größe. Mit den Jahren wurde Klein immer mehr der Zeus, der über den anderen Olympischen Größen thronte. Er hieß bei uns der ›Große Felix‹ und herrschte über unser Schicksal.«

Wegbereiter der Mathematik des 20. Jahrhunderts: David Hilbert

David Hilbert (1862 – 1943) war nach seiner Berufung 1895 zweifellos das Zentrum der Mathematik in Göttingen. Er hatte schon vorher in Königsberg durch bahnbrechende Arbeiten auf sich aufmerksam gemacht und rechtfertigte die von Althoff und Klein in ihn gesetzten Erwartungen, indem er schon um 1900 zusammen mit Henri Poincaré (1854 – 1912) in Paris der weltweit führende Mathematiker war. Für den internationalen Mathematikerkongress 1900 in Paris wurde er um einen Vortrag über die Zukunft der Mathematik im neuen Jahrhundert gebeten. Seine Antwort war die Formulierung von 23 aktuellen Problemen, die auch tatsächlich die Richtung der mathematischen Forschung in den folgenden fünfzig Jahren wesentlich beeinflussten.

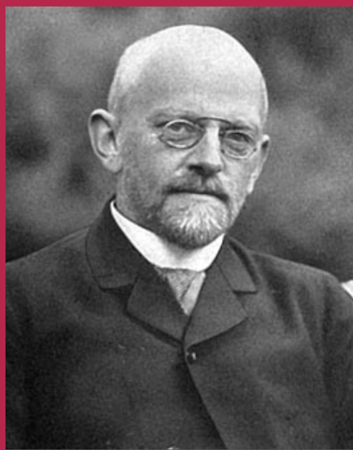
Hilbert wandte sich alle paar Jahre einem völlig neuen Arbeitsgebiet zu. In dieser Universalität ist er nur mit Gauß vergleichbar und seither nie wieder erreicht worden. So erschloss er in den Jahren um 1905 mit der Entwicklung der Funktionalanalysis die späteren Methoden der Quantentheorie und arbeitete danach mit Einstein zusammen an der allgemeinen Relativitätstheorie. In den 1920er Jahren widmete er sich mit seinen Schülern Fragen der Logik, die wiederum später für die Computertechnologie wichtig wurden. Unter seinen Themen ist eines auch allgemein zugänglich, die *»Grundlagen der Geometrie«*. Unter diesem Titel veröffentlichte er die Festschrift zur Einweihung des Gauß-Weber Denkmals in Göttingen am 17. Juni 1899.

Der Kreis der Schüler um Hilbert war sehr erstaunt, als ihr Meister für das Wintersemester 1898/99 eine Vorlesung mit dem Titel *Elemente der Euklidischen Geometrie* ankündigte. Von dieser Vorlesung ist eine handschriftliche Ausarbeitung von H. v. Schaper erhalten. Man erhält durch sie einen wunderbaren Einblick in Hilberts Arbeitsweise während der Vorlesung, etwa wenn er anfangs etwas als ungeklärtes Problem hinstellt und einige Wochen später sagt: Hier ist die Lösung!

Am Anfang dieser Vorlesung steht eine detaillierte Diskussion verschiedener Axiome der Geometrie, die er mit der folgenden Bemerkung abschließt: *»Die Reihenfolge der nun folgenden Sätze wird von der in den Lehrbüchern der Elementargeometrie üblichen stark abweichen, sie wird dagegen vielfach übereinstimmen mit der Reihenfolge bei Euklid. So führen uns diese ganz modernen Untersuchungen dazu, den Scharfsinn dieses alten Mathematikers aufs Höchste zu bewundern.«*

Euklid (um 300 v. Chr.) hatte in seinen *Elementen* die Geometrie auf Axiomen aufgebaut. Da sein Buch aber ein heterogenes Sam-

Felix Klein
(1849 – 1925)



David Hilbert
(1862 – 1943)

melwerk ist, ist der beabsichtigte Aufbau nur in Teilen wirklich durchgeführt. Hilbert diskutiert die Axiomatik in der Vorlesung in vielen Einzelheiten. In der Buchfassung – wieder ein Zeugnis aktueller Arbeit – ist das dann sehr komprimiert. Für den (auch für die Mathematik allgemein geltenden) grundsätzlichen Standpunkt Hilberts dabei zitieren wir die ersten Worte des Buches:

»Erklärung: Wir denken *drei verschiedene Systeme von Dingen: Die Dinge des ersten Systems nennen wir Punkte, ... die des zweiten Systems Geraden ... und die des dritten Systems Ebenen ...*

Wir denken *die Punkte, Geraden, Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen, ... die genaue und für mathematische Zwecke vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die Axiome der Geometrie.«*

Daran sind zwei Aspekte bemerkenswert: einmal die *»für mathematische Zwecke genaue und vollständige«* Grundlegung der Theorie durch Axiome, das bedeutet eben auch die vollständige Ablösung von der Anschauung für Beweisführungen. (Natürlich verwendet Hilbert dann später sozusagen als hilfreiche Hinweise für schnelleres Verständnis der Argumente auch Zeichnungen.) Dieser Standpunkt hat sich in der heutigen Mathematik allgemein durchgesetzt. Zweitens, und im Zusammenhang damit, die hier betonte Formulierung *»Wir denken drei Systeme ...«* , *»Wir denken die Punkte ... in gewissen Beziehungen«*. Mit voller Absicht steht hier nicht das unverbindliche »Wir *denken uns* ...«. Die Betonung liegt auf der eigenständigen denkerischen Hervorbringung der Objekte des Denkens. Hier schließt Hilbert offenbar an die schon von Richard Dedekind (1831 – 1916, Schüler von Gauß) betonte Schöpfungskraft des menschlichen Geistes an.

Insbesondere in Bezug auf den ersten Aspekt hat man die Grundlagen der Geometrie als Gründungsdokument der modernen Mathematik bezeichnet. Der zweite Aspekt gehört eher in die Philosophie der Mathematik, in der die Seinsart der Objekte der Mathematik auch heute weiter diskutiert wird.

Mit einem Zitat Hilberts soll diese Einführung in die Gedankenwelt einiger berühmter Göttinger Mathematiker enden, das er 1932 seinem Werk *»Anschauliche Geometrie«* voranstellte: *»Im allgemeinen erfreut sich die Mathematik, wenn auch ihre Bedeutung anerkannt wird, keiner Beliebtheit. Das liegt an der weit verbreiteten Vorstellung, als sei die Mathematik eine Fortsetzug oder Steigerung der Rechenkunst. Dieser Vorstellung soll unser Buch entgegenwirken.«* Dass die Mathematik mehr ist als gesteigerte Rechenkunst, sollte auch dieser Beitrag – wie im Übrigen alle Artikel in diesem Magazin zum Jahr der Mathematik – zeigen.

Boysche Fläche - geometrisches Objekt, entdeckt 1902 vom Hilbert-Schüler Werner Boy

After the founding of the Georg-August-Universität Göttingen in 1737, the first professors to teach mathematics would today be regarded more as engineers than as mathematicians. In 1756 G. A. Kaestner came to Göttingen from Leipzig explicitly as a professor of mathematics. He wrote a series of very popular textbooks, but otherwise was at least as active in the field of literature as he was in mathematics.

The situation changed completely, at least with respect to mathematical research, upon the arrival of C. F. Gauss in Göttingen in 1807. But even he received his position in fact as an astronomer, not as a mathematician. After the death of Gauss, it was clear to the University that his successor had to be a most eminent mathematician. That was why they called Dirichlet, whom Gauss himself had esteemed highly. The same was true for Dirichlet's successor Riemann. Like Riemann, the next mathematician, Clebsch, died at an early age in 1872. A series of further mathematicians came, but left Göttingen again for other destinations after only a few years.

In the early 1880s the Prussian administration decided to establish the University of Göttingen as a second centre of mathematics and physics alongside the university of Berlin. This is why Felix Klein, the most famous mathematician in Germany at the time, was called to Göttingen. Klein was not only a very creative mathematician, but also a remarkably successful manager. In close cooperation with the government in Berlin he was able to create a mathematics department with the professors Hilbert, Minkowski, Runge, and a crew of very talented young scientists, which constituted the mathematical centre of the world during the period 1895 – 1914. (One has to keep in mind the fact that around 1900, the University of Göttingen had a total of approximately 1,500 students and four full professors of mathematics, which was unheard of in those days.)

In the 1920s Emmy Noether and her group in Göttingen developed what was then called »modern algebra«. This new style in mathematics was popularized and became standard right up to today through the book under this very title by van der Waerden, one of Noether's young co-operators.

Göttingen was long regarded as the hub of the mathematical world – a position lost when under Nazi rule more than 50 professors and lectures were forced to leave the university.

Prof. Dr. Benno Artmann, Jahrgang 1933, hat seit seiner Emeritierung 1998 von der TU Darmstadt einen Lehrauftrag für Didaktik der Mathematik am Mathematischen Institut der Universität Göttingen. Seine Ausbildung begann mit einer Maurerlehre, der das Abitur auf dem zweiten Bildungsweg sowie ein Studium der Mathematik und Physik an den Universitäten Tübingen, Göttingen und Gießen folgten. Nach der Promotion 1965 in Gießen war der Mathematiker von 1966 bis 1968 an der University of Michigan (Ann Arbor, USA) und der McMaster University (Hamilton, Ontario, Kanada) tätig. Im Anschluss an die Habilitation (1968) mit Arbeiten aus der projektiven Geometrie in Gießen wurde Benno Artmann dort 1970 zum Professor am Mathematischen Institut berufen. 1974 übernahm er der Leitung einer von der VolkswagenStiftung eingerichteten Arbeitsgruppe für Didaktik der Mathematik an der TU Darmstadt. Angeregt durch didaktische Überlegungen zur Elementargeometrie vertiefte er seine Studien der Elemente Euklids, deren Ergebnisse er in dem Buch »Euclid – The Creation of Mathematics« (2. Aufl. Springer New York 2001) zusammenfasste.

Im so genannten »Giftschrank« der Bibliothek des Mathematischen Instituts in der Göttinger Bunsenstraße stehen 29 Bände der »Protocolle« – Aufzeichnungen der Seminare, die von Felix Klein geleitet wurden: 40 Jahre, mehr als 8.000 Seiten, nicht nur über Mathematik sondern auch Mechanik, Astronomie, Geodäsie, Hydrodynamik, Elektrizität und in späteren Jahren Psychologie, Philosophie und Pädagogik. Diese Protokolle und auch andere Dokumente über Klein, werden hier vorgestellt.

Die Felix Klein Protokolle

Aus dem »Giftschrank« der Mathematischen Fakultät

Yuri Tschinkel

Aus der Biographie

Felix Klein wurde am 25. April 1849 in Düsseldorf geboren. Aus der Autobiographie [4] erfahren wir über seinen Vater: »*alt-preußisch protestantische Gesinnung, ... zäher Wille, nie nachlassender Fleiß, nüchterner Wirklichkeitssinn, unbedingte Zuverlässigkeit*« und über seine Mutter: »*von heiterer Natur und von größerer Beweglichkeit der Auffassung als der Vater.*«

Kurz nach Kleins Promotion 1868 in Bonn starb sein Doktorvater Julius Plücker. Die Herausgabe dessen »Neue Geometrie des Raumes« übernahm der Göttinger Alfred Clebsch, der seinerseits diese Aufgabe an Klein weiterreichte. Also wurde Klein nach Göttingen geholt, wo für ihn eine Zeit »*beglückender wissenschaftlicher Begeisterung einsetzte*«.

Diese war von kurzer Dauer: »*So ging ich entgegen dem Wunsche von Clebsch, der mir genauso wie früher Plüecker von diesem Plane abgeraten hatte, schon im Herbst 1869 nach Berlin, wo eine ganz andere mathematische Richtung herrschte als die, welche ich bisher kennengelernt hatte. ... Für den Sommer 1870 ging ich mit meinem Freunde Lie zusammen nach Paris. Den folgenden Winter wollten wir dann in England zubringen, was aber der einsetzende Krieg vereitelt hat. Dieser Drang nach möglichster Weite der wissenschaftlichen Auffassung, dem auch eine Kenntnis der ausländischen Leistungen wichtig erschien, fand damals in Deutschland nur wenig Verständnis. So bekam ich z. B., als ich mich in Berlin auf Drängen meines Vaters im Kulturministerium um Empfehlungsschreiben bemühte, die offizielle Antwort: ›Wir bedürfen keiner französischen oder englischen Mathematik.‹*«

Der Krieg überraschte Klein in Paris. Er eilte zurück nach Deutschland, um in das preußische Heer einzutreten. Nach kurzem Militärdienst habilitierte er 1871 in Göttingen und erhielt bereits 1872 den Ruf auf eine Professur in Erlangen: »*... der mathematische Betrieb in Erlangen lag völlig darnieder. Offenbar hatte man eine ganz junge Kraft gerufen, damit sie einem tief im Schlendrian stecken gebliebenen Karren Vorspanndienste leistete.*«

Wieder kam das Schicksal dazwischen: Clebsch starb und seine Schüler, teilweise älter als Klein, kamen nach Erlangen. Unter seinen damaligen Hörern waren Max Planck, Adolf Hurwitz und Ferdinand von Lindemann.

Die nächsten Jahre, in Erlangen (1872 – 1875), München (1875 – 1880) und Leipzig (1880 – 1886) waren voll von angespannter wissenschaftlicher Arbeit,

die in Untersuchungen der automorphen Funktionen und dem Wettbewerb mit Henri Poincaré kulminierten. In [5] werden die Ereignisse der folgenden Jahre so zusammengefasst:

1882: *Volles Zusammenklappen der grossen Produktivität. Unmöglichkeit, wiss. und organisatorische Arbeit nebst allseitiger Dozententätigkeit mit gleicher Energie neben einander herzuführen. ... Bild von dem Mantel, der mir zu weit ist.*

1883: *Bullfieber betr. Baltimore.*
12 Dez. Ruf nach Baltimore. Große Lust, hinzugehen.
[endlose Korrespondenz nach allen Seiten]

1884: *31. Jan. Baltimore abgelehnt*

1884: *19/10 Göttingen fängt an zu spuken.*

1885: *Bruns nach Göttingen!*
Bruns lehnt Göttingen ab.

7/8 *Ruf nach Göttingen. Angenommen:*
Haus mit Garten
Weniger Geschäfte
Preußen.

gesucht: Konzentriertes wissenschaftliches Dasein auf Basis eines vernünftigen Familienlebens

Im Folgenden ein Auszug aus der Korrespondenz, vor der Ablehnung des Rufes nach Baltimore im Dezember 1883. Der Freund Sophus Lie schrieb an Klein:

»*Was Dich und Deine wissenschaftliche Thätigkeit angeht, so glaube ich, dass eine Uebersiedelung nach Baltimore (die doch hoffentlich nur fünf bis zehn Jahre dauern wird) Dir im grossen Ganzen nützlich und förderlich sein wird. Hierbei sehe ich die Sache folgendermassen. Zwischen Dir und Berlin, wie früher zwischen Clebsch und Berlin, besteht ein Rivalisiren. Du deinerseits bist gerecht gegen die Berliner, die Du verstehst und würdigst. Die Berliner Schule dagegen hat im längsten versucht, Deine Thätigkeit wenn nicht eben ignorieren, so doch möglichst herunterzuziehen. Alle Deine glänzenden geometrischen Arbeiten kommen bei den meisten dieser Herren wenig in Betracht. Deine analytischen Arbeiten haben sie lange nicht verstanden. ... Obgleich ich Dich daher als Sieger in diesem Kampfe mit den Berlinern betrachte, so glaube ich, dass es für Dich gut sein wird, für einige Jahre diese aufreibende Geschichten zu verlassen, um so mehr da Deine Gesundheit nicht immer befriedigend ist. Du kannst es mit Ehre machen; denn der Sieg ist Dein. Ich glaube übrigens, dass Dein Ruhm sehr viel durch eine Uebersiedelung nach Baltimore wachsen wird. ... Und was Deutschland betrifft, ... fühle ich mich überzeugt, dass die Berliner Schule Dir genauer folgen wird, wenn Du erst in Baltimore bist.*«

Zu dieser Zeit befand sich das mathematische Zentrum Deutschlands zweifelsohne an der Friedrich-Wilhelms-Universität (ab 1949 Humboldt-Universität) in Berlin.

Die Berliner Schule stand Klein sehr ablehnend gegenüber. Bei der Besetzung einer Professur 1892 wurde er mit folgender Begründung übergangen [1, S. 207]: »*... Vor allen Dingen aber mußte darauf Bedacht genommen werden, daß die zu Berufenden geeignet sein würden, die seit Generationen an unserer Universität geübte Anleitung der Studierenden zu ernster und selbstloser Vertiefung in die mathematischen Probleme fortzusetzen. Aus diesem Grunde mußte von Persönlichkeiten wie Professor Felix Klein in Göttingen (geb. 1849) abgesehen werden, über dessen wissenschaftliche Leistungen die Urtheile der Gelehrten sehr getheilt sind, dessen ganze Wirksamkeit aber in Schrift und Lehre mit der eben gekennzeichneten Tradition unserer Universität in Widerspruch steht.*«

Was seine Aktivitäten bei der Anleitung der Studierenden anging, hatte Klein zu diesem Zeitpunkt bereits 30 Dissertationen betreut, weitere 27 kamen noch dazu. Unter seinen Doktoranden waren Maxime Bocher, Henry B. Fine, Vergil Snyder, Henry White – spätere Präsidenten der American Mathematical Society. Kleins Göttinger Kollege Hermann Schwarz, der sich übrigens im Separatvotum gegen die Berufung von Klein nach Göttingen ausgesprochen hatte, geht nach Berlin. Dazu schrieb Klein taktvoll [4, S. 23]:

»Hinterher muß ich es als ein Geschenk betrachten, dass allerlei Hemmungen, die in den Verhältnissen lagen, sich damals der Ausübung meiner organisatorischen Neigungen entgegenstellten und ich auf diese Weise Zeit zum Ausbau und Abschluß meiner wissenschaftlichen Arbeiten gewann. Denn mit dem Fortgange H. A. Schwarzs, der 1892 einem Ruf nach Berlin Folge leistete, begann für mich eine neue Periode meiner Tätigkeit.«

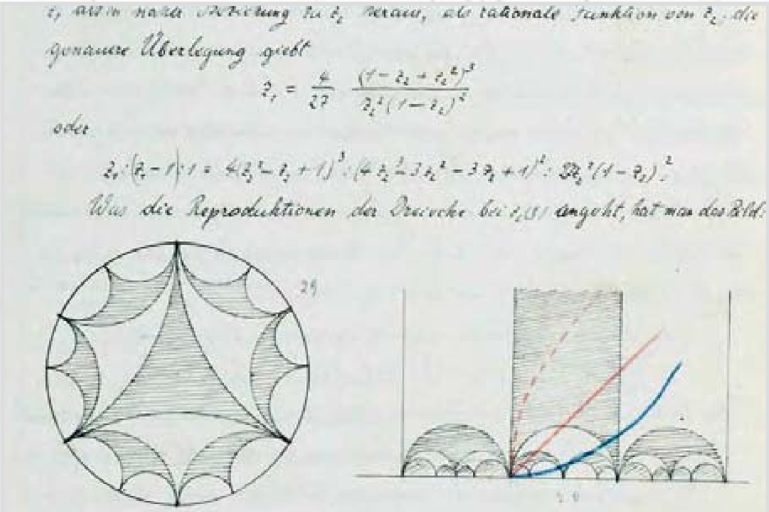


Abb. 1: Aufzeichnungen zur Lehrveranstaltung von Klein, Hilbert und Minkowski im Wintersemester 1905/06 zum Thema »Automorphe Funktionen«

Zum ersten großen Erfolg Kleins, im Rahmen der neu entstandenen Freiräume, wurde die 1895 durchgesetzte Berufung des 33-jährigen David Hilbert auf den Gauß-Lehrstuhl nach Göttingen. Hilberts Vortrag auf dem Weltkongress der Mathematiker in Paris im Jahr 1900, in dem er die berühmten 23 Probleme formulierte, etablierte ihn als einen der einflussreichsten Mathematiker seiner Zeit. Er überzeugte sogar die Berliner Schule: Im Jahr 1902 beantragte die Philosophische Fakultät der Friedrich-Wilhelms-Universität, Hilbert zum Nachfolger von Fuchs zu berufen. Die Kommission hielt es für nötig, neben viel Lob für Hilbert (»kühnes Genie«) auch die folgende Meinung dem Minister zukommen zu lassen [1, S. 211]:

»Die Gründe, welche die Facultät vor 10 Jahren bewogen haben, Herrn Klein in Göttingen nicht vorzuschlagen und auf die wir bitten Bezug nehmen zu dürfen, bestehen nicht nur unvermindert fort, sondern haben sich inzwischen noch verstärkt, weil er [für diesen ganzen Zeitraum kaum eine wissenschaftliche Leistung von Bedeutung aufzuweisen hat und seine Gedanken mehr und mehr anderen Interessen zugewandt zu haben scheint].«

Gleichzeitig bekam der Minister einen Antrag aus Göttingen für ein Extraordinariat für reine Mathematik als Teil des Bleibeangebots für Hilbert. In diesem Vergleich gewann Göttingen; Hermann Minkowski, ein Schulfreund von Hilbert, wurde schließlich berufen. Dazu bemerkte Klein: *»Beginn der Kultur der Gegenwart.«*

Nach der Ablehnung des Rufes durch Hilbert bemühten sich die Berliner weiterhin, die vakante Stelle zu füllen. Bereits einen Monat nach dem obigen Brief, ging der nächste Antrag an den Minister [1, S. 214]. In diesem wurden weitere Kandidaten besprochen:

»Herr Runge an der technischen Hochschule zu Hannover ist ein feiner, geistreicher Kopf, aber seit langer Zeit nicht mehr Mathematiker, sondern ausschließlich Physiker. Ehe er sich seinem eigentlichen Forschungsgebiete zuwandte, der physikalischen Optik, worin er Vorzügliches geleistet hat, hat er einige kleinere Aufsätze mathematischen Inhalts verfaßt, worin er das, was er bei seinen Lehrern Weierstrass und Kronecker gelernt hat, auf specielle Fragen anwendet, und die, etwa als Seminararbeiten aufgefaßt, recht beachtenswert sein würden, aber einen Anspruch auf eine mathematische Professur an unserer Universität in keiner Weise begründen können. Seine Berufung würde lediglich eine Verstärkung des physikalischen Unterrichts bedeuten. Das dritte Ordinariat für Mathematik aber, auf dessen Erhaltung an unserer Universität Kummer, Weierstrass, Kronecker so hohen Werth gelegt haben, und das die Liberalität der Regierung unserer Schwesteruniversität Göttingen in so hoch erfreulicher Weise jetzt ebenfalls zugestanden hat, würde uns zu derselben Zeit auf diesem Umwege thatsächlich wieder entzogen sein.«

In der ursprünglichen Fassung fanden sich auch solche Betrachtungen, die dem voreingenommenen Ministerium die Augen öffnen sollten:

»Wir müssen noch einer mißverständlichen Auffassung vorbeugen, die sich leicht bei denen einstellen kann, die der Mathematik ferner stehen, insbesondere solchen, die theologisch oder juristisch geschult sind. [...] In der Mathematik gibt es schöpferische Künstler und nachbildende Handwerker, scharfsinnige Kritiker und kritiklose Eklektiker. Solche, die Probleme stellen und lösen können und solche, deren Willen größer ist als ihr Können (gewissenhafte Forscher, die es für nötig halten, für ihre Behauptungen strenge Beweise beizubringen und geistreiche Feuilletonisten, die sich darüber erhaben dünken), ...«

Der »nachbildende Handwerker« in Göttingen beantragte bald eine neue Professur: Den ersten Lehrstuhl Deutschlands für angewandte Mathematik, auf den 1904 Carl David Runge berufen wurde. Aus dem Antrag der Friedrich-Wilhelms-Universität an den Kultusminister von Trott vom 22. Juni 1914, ein viertes Ordinariat zu errichten und Hilbert zu berufen sei folgende Passage zitiert: [1, S. 221]:

»Auch Göttingen hat ja vier etatsmäßige mathematische Ordinariate. [...] Er [Hilbert] ist einer der scharfsinnigsten und vielseitigsten Mathematiker, ein Gelehrter von Weltruf, Mitglied der meisten gelehrten Gesellschaften. Wir haben seine Leistungen schon einmal gewürdigt, als wir 1902 seine Berufung an un-

sere Universität beantragten. Damals hat er den Ruf abgelehnt; inzwischen hat er sich, nachdem Berlin ein kleines Göttingen geworden ist, vielleicht eines besseren besonnen.«

Auch diesmal lehnte Hilbert ab. Die Resignation über die Verwandlung von Berlin in ein »kleines Göttingen« hatte einen Nachklang im Antrag von 1919 bei dem gescheiterten Versuch, auch in Berlin ein Ordinariat für angewandte Mathematik zu errichten und Runge zu berufen:

»*Runge ist ein ausgezeichneter Lehrer; er hat in Göttingen eine sehr inhaltsreiche Tätigkeit entwickelt und sein Institut zu hoher Blüte gebracht; eine Reihe interessanter Dissertationen sind in seinem Institut entstanden. [...] Falls es gelingen sollte, Runge für die Berliner Universität zu gewinnen, worauf die Hoffnung nicht ganz unberechtigt ist, würde er trotz seiner Jahre in wenigen Jahren auch hier ein Zentrum für die angewandte Mathematik schaffen ...*«

Einen großen Anteil an der skizzierten Transformation der Mathematik in Deutschland hatte Friedrich Althoff, der Klein bereits 1870 während des Krieges kennengelernt hatte. Er wurde 1882 als Universitätsreferent in das preußische Bildungsministerium berufen, stieg 1897 zum Leiter des gesamten Unterrichts- und Hochschulwesens auf und war in dieser Funktion maßgeblich an der Verteilung der Stellen und Mittel beteiligt. Für manche war er »Intrigant unter der Maske eines biederen westfälischen Bauern«, für Felix Klein dagegen ein effektiver Staatsmann [4, S. 24]:

»*Mißvergnügte Elemente haben in der Presse die Ansicht zu verbreiten gesucht, Althoff sei der Typus eines reaktionären Beamten gewesen, eine Behauptung, die aber völlig unzutreffend ist. Die Sache war vielmehr die, daß er nach oben und unten autokratisch verfuhr und nach opportunistischen Grundsätzen handelte, wobei er sich für jedes einmal als richtig erkannte Ziel voll und ganz einsetzte und es unter Ersinnung immer wechselnder Methoden, die gerade für die betreffende Lage Erfolg versprachen, schließlich erreichte.*«

Die »Protocolle«

Die Seminare in Erlangen und Leipzig behandelten viele Gebiete der Mathematik und Physik ohne erkennbaren Plan. Unter dem Titel »Über verschiedene Gegenstände« wurden Vorträge über »Physikalische Theorie des Nordlichtes«, »Die Elemente der Arithmetik«, »Das Imaginäre in Geometrie« und »Die Verteilung der Wärme in der Kugel« gehalten. Felix Klein sprach über Auflösung von Gleichungen vom Grad 5, magnetische Kurven, elastische Saiten, die Gesetze von Ampère und Ohm sowie polarisiertes Licht. Später schrieb Klein [3, S. 240]:

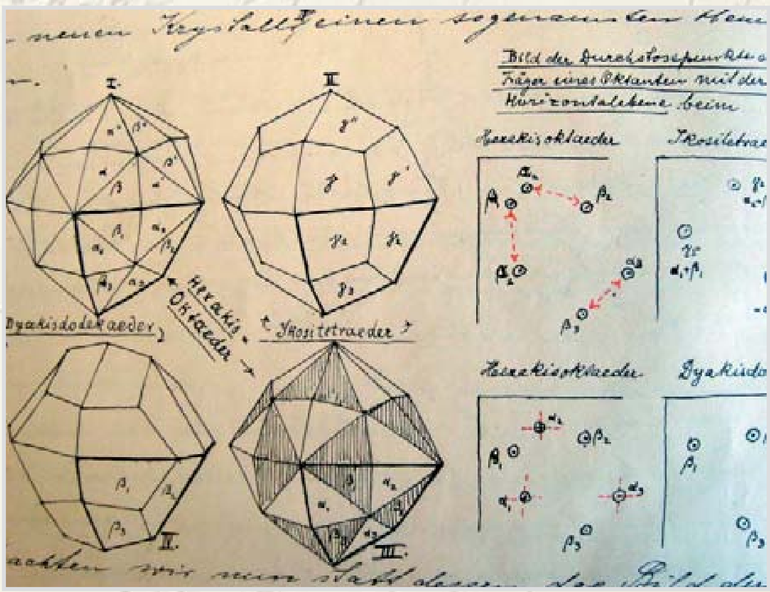
»*Ich vergleiche die mathematische Wissenschaft mit einem Baume, der seine Wurzeln nach unten immer tiefer in das Erdreich treibt, während er nach*

Abb. 2: Portrait von Felix Klein

oben seine schattengebenden Äste frei entfaltet. Sollen wir die Wurzel oder die Zweige als den wesentlicheren Teil ansehen? Die Botaniker belehren uns, daß die Frage falsch gestellt ist, daß vielmehr das Leben des Organismus auf der Wechselwirkung seiner verschiedenen Teile beruht.«

In den Jahren 1880 bis 1895 wurden die Themen der Seminare deutlich präziser. Es ging hauptsächlich um Kleins eigene Forschung in Funktionentheorie und Gruppentheorie. Im Wintersemester 1881/82 trug er über seine Arbeit »Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale« vor, im Wintersemester 1882/83 behandelte er »Hyperelliptische, Abelsche und Thetafunktionen« und anschließend

Abb. 3: Zeichnung von Felix Klein: Ikositetraeder



widmete er sich fast ausschließlich den hyperelliptischen und hypergeometrischen Funktionen. Nach der Berufung von Hilbert und später Minkowski wurden gemeinsame Seminare über Funktionentheorie, Mechanik, Differentialgleichungen und automorphe Funktionen organisiert.

Die letzten 15 Jahre seiner Seminartätigkeit an der Georgia Augusta waren durch eine unglaubliche Ausweitung der Themen gekennzeichnet: Zusammen mit Prandtl, Runge und Voigt führte Klein Seminare über Elastizitätstheorie, Elektrotechnik, Hydrodynamik, Schiffstheorie und Meteorologie, Baukonstruktion und Festigkeitslehre durch; mit Bernstein darüber hinaus ein Seminar über Versicherungsmathematik. Diese Themenfülle war mit dem Aufbau von Kontakten und Kooperationen mit der Industrie [4, S. 27] verbunden:

»*Den amerikanischen Anregungen folgend, war es von vornherein meine Absicht, industrielle Kreise für diese Gedankengänge und für unser Göttinger Institut im besonderen zu interessieren. Obwohl mich hierbei der Gedanke reizte, in unserm überall auf Staatshilfe wartenden Volke einmal aus privater Initiative Ideen zur Verwirklichung zu bringen, lag mir dennoch bedeutend mehr an der befruchtenden gegenseitigen Einwirkung, welche ich mir von der Zusammenarbeit des stillen Gelehrten und des im praktischen Leben stehenden, schöpferisch tätigen Großindustriellen versprach.*«

»*Mit diesen Gedanken stieß ich aber überall auf Widerstand. Zunächst wurde von Seiten der Universitäten die Befürchtung laut, es könnte ihr köstliches Gut, die trotz aller Enge bewahrte Lauterkeit der rein wissenschaftlichen Forschung, die von keinen Nebenzwecken beeinflusst wird, durch die Berührung mit den Kreisen des Erwerbs Schaden leiden. Man warf mir Amerikanismus vor, sprach vom Verrate an der Wissenschaft, ja man fürchtete sich sogar, durch die Annahme finanzieller Hilfe in gefährliche Abhängigkeit zu geraten.*«

Es wurden auch Grenzfragen der Mathematik und Philosophie behandelt, wobei sich mitunter Kleins heitere Natur offenbarte. Zu Euclid's Definition »Fläche ist, was nur Länge und Breite hat« sagte er [3, S. 250]:

»*Wenn Sie aber andere Gegenstände, die uns täglich umgeben, aus kleinerem Abstand betrachten als die Wände, z. B. des Morgens nach dem Aufstehen den Badeschwamm, mit dem man sich wäscht, oder beim Frühstück die Semmel, die man durchbrochen hat – wo ist da die Oberfläche, die nur Länge und Breite hat?*«

Das Erbe

Im Frühjahr 1923 schrieb Felix Klein: »*Dabei ist es mir aber immer klarer geworden, daß es uns Menschen in nur sehr beschränktem Sinne möglich ist, das eigene Schicksal selbstständig zu gestalten, da immer wieder äußere Umstände, die von unserm Willen unabhängig sind, maßgebend dazwischen treten.*«

Sein ganzes Leben lang kämpfte Klein um die Errichtung eines mathematischen Instituts in Göttingen. Mehrere detaillierte Pläne wurden angenommen und

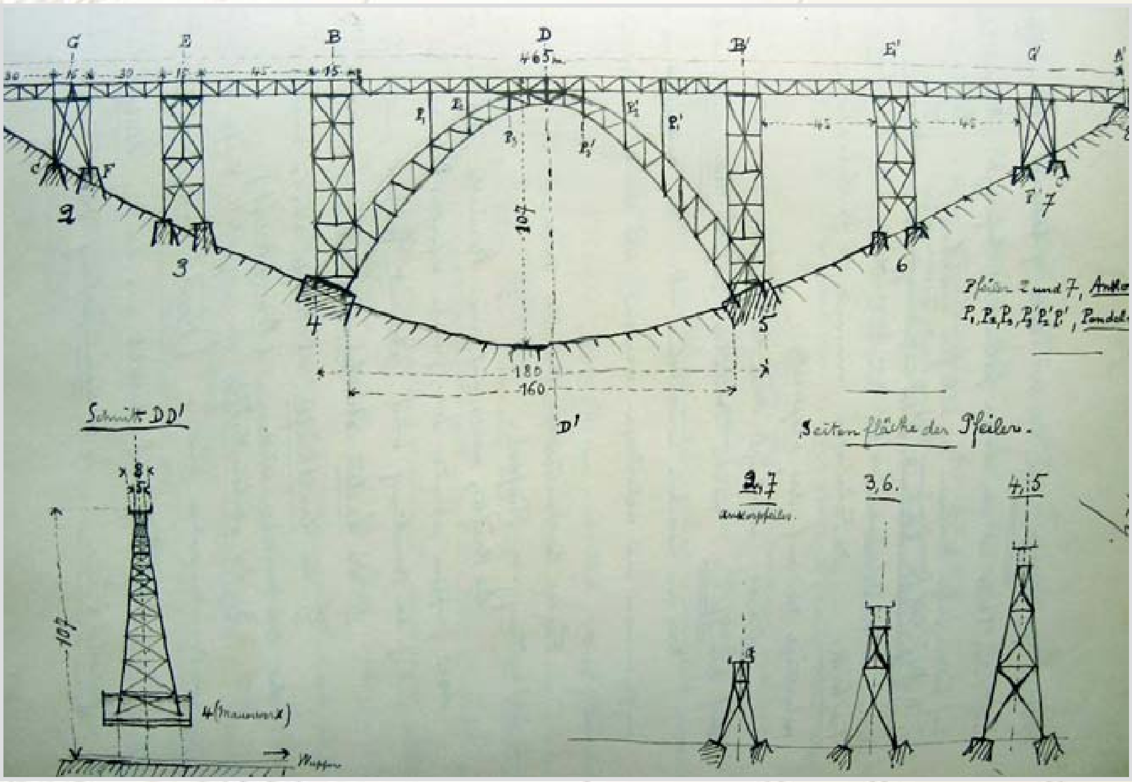


Abb. 4: Skizze der Kaiser-Wilhelm-Brücke bei Müngsten aus Kleins Unterlagen zum Sommersemester 1900 »Anwendungen der Elastizitätstheorie«. Die Kaiser-Wilhelm-Brücke war zum Zeitpunkt ihrer Einweihung im Jahr 1897 die größte Brücke der Welt.

verworfen, weil Krisen, Krieg und Inflation dazwischenkamen. Felix Klein starb im Juni 1925. Im Oktober 1925 kam A. Trowbridge nach Göttingen, als Vertreter des International Education Board (IEB), einer Rockefeller-Stiftung. Sein Hauptkontakt in Göttingen war Richard Courant. In seinem Bericht findet sich folgende Bemerkung zur Göttinger Mathematik [6, S. 145]:

»The group has a lot of »pep« (they are criticized as having the ambition of being a world center in mathematics and some of the mathematicians [...] intimate that they would be unscrupulous in trying to realize this ambition). [...] The really great eminence of the Göttingen school of mathematics existed twenty years ago.«

Trotz dieser verhaltenen Einschätzung erfolgte 1926 das Angebot der Stiftung, ein Institut zu errichten. Im November 1929 wurde das Institut in der Göttinger Bunsenstraße eröffnet. Vier Jahre später mussten Courant und viele seiner Kollegen Göttingen wegen der Judenverfolgung in Deutschland verlassen. Richard Courant wurde Professor an der New York University. Er gründete ein neues Institut, das 1965 in ein großzügiges Gebäude am Washington Square einzog. Als er kurz vor seinem Tod 1972 auf den besonderen Geist angesprochen wurde, der in seinem Institut herrsche, antwortete Courant: »It is Göttingen. Göttingen is here.«

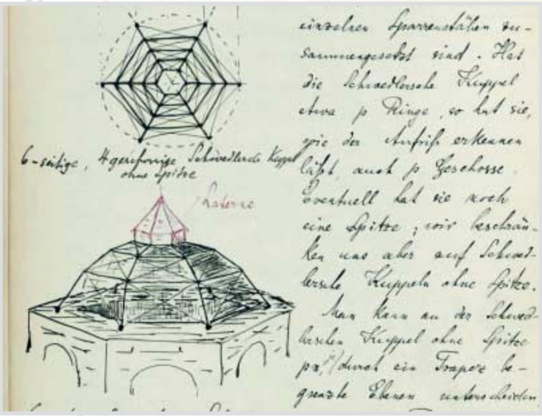


Abb. 5: Zeichnung so genannter »Kuppelfachwerke« aus den Aufzeichnungen Kleins zur Vorlesung »Anwendungen der Elastizitätstheorie« im Sommersemester 1900

Literatur:

[1] K.-R. Biermann, Die Mathematik und Ihre Dozenten an der Berliner Universität 1810-1920, Stationen auf dem Wege eines mathematischen Zentrums von Weltgeltung, Akademie Verlag, Berlin (1973).

[2] E. Chislenko, Y. Tschinkel, The Felix Klein protocols, Notices AMS, 54 (8), 958-968, (2007).

[3] F. Klein, Über die Arithmetisierung der Mathematik (1895), in Gesammelte Werke II, Springer Verlag (1922).

[4] F. Klein, Göttinger Professoren (Lebensbilder von eigener Hand): Felix Klein, Mitteilungen des Universitätsbundes Göttingen 5, (1923).

[5] Vorläufiges aus Erlangen, München und Leipzig, in K. Jacobs, Hrsg., Felix Klein Handschriftlicher Nachlass, Erlangen, (1977).

[6] R. Siegmund-Schultze, Rockefeller and the Internationalization of Mathematics Between the Two World Wars, Birkhäuser Verlag, (2001).

The Library of the Mathematics Institute of the University of Göttingen holds a *Giftschrank*, or »poison cabinet«, a collection of rare mathematical manuscripts and books. A recent report on this archive by J. Gray speaks of *»a range of material unrivalled in quantity and quality«*. The Giftschrank includes handwritten lecture notes of lectures held in Göttingen by Dirichlet, Riemann, Clebsch, Hilbert, Minkowski, Hasse, Siegel, and Born. The centrepiece of this collection is Felix Klein's set of seminar records: 8,000 pages, 29 volumes, 40 years of seminar notes. The article describes Felix Klein's manifold scientific interests, as documented in these *Protocolle*, and his relentless push to develop Göttingen to the leading centre of mathematics in Germany.

In his Evanston Colloquium lectures in 1893, after the Chicago World Fair, Klein described his programme as follows: *»As regards my own higher lectures, I have pursued a certain plan in selecting the subjects for different years, my general aim being to gain, in the course of time, a complete view of the whole field of modern mathematics, with particular regard to the intuitional or (in the highest sense of the term) geometrical standpoint.«*

His 40 years of seminars cover not only mathematics, but also mechanics, astronomy, geodesy, hydrodynamics, electricity, elasticity, as well as psychology and teaching of mathematics.

The *Protocolle* are now available online, thanks to support by the Clay Mathematics Institute, at www.claymath.org/library/historical/klein/

Prof. Dr. Yuri Tschinkel, Jahrgang 1964, studierte Mathematik an der Moskauer Staatlichen Universität. Nach der Promotion am Massachusetts Institute of Technology war er Junior Fellow der Harvard Society of Fellows (1992 – 1995) und Leibniz Fellow der EC an der École Normale Supérieure in Paris (1995 – 1996). Danach lehrte er an der University of Illinois in Chicago und der Princeton University. Von 2003 bis 2008 war er Inhaber des Gauß-Lehrstuhls an der Georg-August-Universität Göttingen. Jetzt ist er Professor and Chair of Mathematics am Courant Institute, New York University. Er lehrt und forscht auf dem Gebiet der Algebraischen Geometrie und Zahlentheorie.

Foto: Gisa Kirschmann-Schröder

Als Carl Friedrich Gauß in der Grundschule die Summe 1 + 2 + ... + 100 ausrechnen sollte und dies durch simple Umordnung (1+100) + (2+99) + ... (50+51) = 50 x 101 in Windeseile schaffte, war sein Lehrer verblüfft. Später konnten Mathematiker zeigen, wann Umordnungen in einer Summe von unendlich vielen Zahlen ohne Änderung des Ergebnisses erlaubt sind. Mathematik ist Nachdenken über Strukturen und Algorithmen, nicht bloßes Rechnen. Bedauerlicherweise steht die Bedeutung der Mathematik in keinem angemessenen Verhältnis zur Anerkennung ihrer Leistungen in der Öffentlichkeit. Die Geringschätzung der Mathematik ist allerdings keine Erfindung unserer Tage. Schon 1925 sah Richard Courant ein Bestreben des Mathematikers Felix Klein (1849 – 1925) darin, »[...] die Mathematik von dem Schicksal zu retten, dass sie sich aus dem allgemeinen Kulturzusammenhange löst und zur Privatangelegenheit eines engen Kreises mehr oder weniger sonderbarer Spezialisten wird.« Seither hat sich wenig verändert: Lediglich die Informatik als neue, rechnergestützte mathematische Disziplin tritt mit breiterer Akzeptanz als die reine Mathematik in das öffentliche Bewusstsein. Ansonsten gilt noch immer das Bekenntnis als salonfähig, von Mathematik nichts zu verstehen und nichts begreifen zu wollen.

Einen besonderen Zugang zur Mathematik eröffnet ihre Geschichte, zu der im ersten Drittel des 20. Jahrhunderts die Georg-August-Universität in Göttingen wesentliche Beiträge geliefert hat. Hier entstand im Zusammenspiel von Preußischem Ministerium und der damaligen Philosophischen Fakultät ein mathematisches Zentrum von Weltrang. Anhand der Kriterien der aktuell abgeschlossenen Exzellenzinitiative des Bundes und der Länder, in der die Universität Göttingen sich im Oktober 2007 erfolgreich mit ihrem Zukunftskonzept durchsetzen konnte, wird am Beispiel dreier Göttinger Mathematiker zu sehen sein, wie an Göttinger Exzellenz in der Mathematik angeknüpft werden kann und was darüber hinaus in der universitären Lehre und gesellschaftlichen Ausstrahlung von Göttingen aus erreicht werden konnte.

Exzellenz für die Mathematik

David Hilbert – Felix Klein – Hermann Minkowski

Hubert Goenner

Zur Geschichte

Seit Gründung der Universität war die Mathematik in Göttingen eng mit ihren Anwendungen, etwa im Vermessungswesen, in der Astronomie und besonders in der Physik, verknüpft. Im 18. Jahrhundert ist Abraham Gotthelf Kästner (1719 – 1800) von seinem genialen Nachfolger Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) zwar als »bester Mathematiker unter den Poeten und bester Poet unter den Mathematikern« verspottet worden, hat jedoch über seine Bücher und Schüler fachlich nachgewirkt. Auch Gauß erzielte neben seinen bahnbrechenden Beiträgen in der reinen Mathematik (Flächentheorie, Nicht-Euklidische Geometrie, Zahlentheorie) enorme Fortschritte in der Astronomie (Bahnberechnung von Himmelskörpern, zum Beispiel des Asteroiden Ceres), der Physik, der Geophysik (Telegraph, Erdmagnetfeld) sowie der angewandten Mathematik (Ausgleichsrechnung). Wenn auch sein Doktorand und Nachfolger Bernhard Riemann (1826 – 1866) diesen Blick auf die Anwendungen nicht besonders pflegte, so ist die mit seinem Namen verbundene »Riemannsche Geometrie« – eine Begriffsbildung in der reinen Mathematik – Grundlage der Einsteinschen Gravitationstheorie (allgemeine Relativitätstheorie) geworden.

Dennoch setzten sich Gauß und seine späteren Kollegen deutlich von dem ab, was heutzutage oft kurzsichtig als Bringschuld der Wissenschaften angesehen wird, nämlich der unmittelbare Ertrag in Form von direkt vermarktbaren Ergebnissen: »Die Wissenschaft soll die Freundin der Praxis sein, aber nicht ihre Sklavin!«, wird Gauß zitiert.

Die großen Drei

Als Erster des Dreigestirns erschien Felix Klein in Göttingen, einer der bedeutendsten Vertreter der Geometrie am Ende des 19. Jahrhunderts. Nach seiner Habilitation in Göttingen 1871 führte seine berufliche Laufbahn über Erlangen, München und Leipzig 1886 zurück an die Georgia Augusta. Den Zenit seiner Wissensproduktion in der reinen Mathematik hatte Felix Klein bereits überschritten. So entstand kein Konflikt zwischen seiner Forschungstätigkeit und seinem aktiven Engagement in der Wissenschaftspolitik. Zusammen mit dem Staatssekretär Friedrich Althoff im Preußischen Kultusministerium betrieb Klein den Ausbau Göttingens zu einem Zentrum der Mathematik. In diesem Sinne unterstützte er die Berufung des zweiten strahlenden Sterns, des Königsberger Kollegen David Hilbert (1862 – 1943), der sich zu einem der wenigen universellen Mathematiker des 20. Jahrhunderts entwickelte. Ihn hatte Klein schon 1885 in Leipzig kennen und schätzen gelernt. Hilbert kam 1895 an die Göttinger Universität.

Im Jahr 1902 konnte Hilbert anlässlich eines (von ihm abgelehnten) Rufes nach Berlin durchsetzen, dass sein Königsberger Freund und Mathematiker Hermann Minkowski (1864 – 1909) 1902 aus Zürich nach Göttingen berufen wurde. Dass der Freund den Freund nach sich zog, gäbe heute Anlass zu Verdächtigungen. In diesem Fall führte die gegenseitige Kenntnis und Wertschätzung ihrer außergewöhnlichen Begabungen die drei Forscher zu einer für die reine und angewandte Mathematik sowie die Physik äußerst fruchtbaren Zusammenarbeit. Beide, Hilbert und Minkowski, hatten mit Ferdinand von Lindemann in Königsberg denselben Doktorvater. In Göttingen setzten sie ihre enge Freundschaft in vielen Gesprächen über ihre mathematischen Forschungsarbeiten fort. Da Minkowski im Alter von nur 44 Jahren starb, besetzten die beiden Spitzenleute Klein und Hilbert mit einer großen Schar von Mitarbeitern für längere Zeit das Terrain.

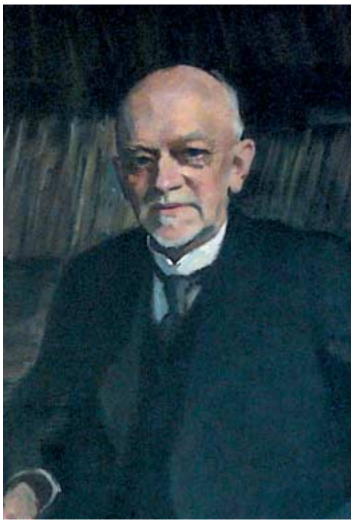
Spitzenforschung mit internationaler Sichtbarkeit

Spitzenforschung mit internationaler Sichtbarkeit – dieses maßgebliche Kriterium der Exzellenzinitiative erfüllten Klein, Hilbert und Minkowski ohne Zweifel – Felix Klein in der reinen Mathematik durch die Theorie der bedeutenden Klasse von automorphen Funktionen und die Verbindung von Geometrie und Gruppentheorie (Erlanger Programm) –, der die meisten Gebiete der Mathematik beherrschende David Hilbert durch seine Invariantentheorie (1885 – 1893), die Theorie der algebraischen Zahlkörper (1893 – 1898), Untersuchungen zu den »Grundlagen der Geometrie (Axiomatik)« (1898 – 1902), Integralgleichungen und Variationsprobleme (1902 – 1912) und die »Grundlagen der Mathematik« (1910 – 1922). Hermann Minkowski schließlich trug fundamentale Arbeiten über Zahlentheorie (Geometrie der Zahlen), konvexe Körper und die geometrische Formulierung der speziellen Relativitätstheorie bei. Kleins, Hilberts und Minkowskis wissenschaftlichen Leistungen begegnet jeder Mathematik- und Physikstudent, wenn er die Begriffe »Kleinsche Flasche«, eine Fläche mit Selbstdurchdringung im Anschauungsraum, beziehungsweise den »Hilbert-Raum«, also den Zustandsraum der Quantenmechanik, oder den »Minkowski-Raum«, die Zusammenfassung von Raum und Zeit zu einem vierdimensionalen Kontinuum, kennen lernt. Diese hier skizzierte Verbindung zwischen der Mathematik und der Physik führt uns zur Kooperation zwischen Disziplinen und Institutionen (Interdisziplinarität) und damit zu einem weiteren Kriterium der Exzellenz.

Portrait David Hilberts in den Arbeitsräumen des Göttinger Mathematischen Instituts
Foto: Gisa Kirschmann-Schröder

Mathematische Physik

Insoweit die Physik quantitative Züge der Erscheinungswelt beschreibt und daraus Vorhersagen für deren zukünftiges Verhalten zieht – zum Beispiel Planetenbewegungen oder Wettervorhersagen –, muss sie auf mathematische Methoden zurückgreifen oder diese selbst entwickeln. Letzteres fällt in das Gebiet der Mathematischen Physik, einem als interdisziplinär definierten Teilgebiet der Theoretischen Physik. Dazu gehört als wesentlicher erkenntnisleitender Beitrag die mathematisch exakte Formulierung und Lösung von aus der Physik kommenden Problemen. Das gilt auch dann, wenn für nahe am Experiment oder an der Beobachtung arbeitende Physiker das Problem schon mit genügender Genauigkeit, aber eben nicht mit ma-


Die großen Drei: Hermann Minkowski (1864 – 1909), David Hilbert (1862 – 1943) und Felix Klein (1849 – 1925) (v. l n. r.)

thematischer Strenge (zum Beispiel Potentialtheorie, Quantenfeldtheorie) erledigt ist.

In Göttingen wurde schon 1850 ein »Mathematisch-Physikalisches Seminar« als ein Institut mit einem eigenen kleinen Etat eingerichtet. Das Interesse der Mathematiker an der Physik spiegelte sich in einem gemeinsam mit Kollegen aus der Physik regelmäßig abgehaltenen Seminar wieder. Von besonderer Bedeutung war das Seminar über Elektronentheorie im Sommer 1905, das von den drei Mathematikern David Hilbert, Hermann Minkowski und Gustav Herglotz sowie dem Geophysiker Emil Wiechert geleitet wurde. Die in ihm behandelten Probleme waren ähnliche wie die, zu denen Albert Einstein in seinem »annus mirabilis« im Sommer 1905 eine Lösung veröffentlichte. Schaut man sich heute die Liste der Seminarteilnehmer an, so tauchen neben bekannt gewordenen Mathematikern und Astronomen die späteren Physik-Nobelpreisträger Max Laue und Max Born auf. Gleichzeitig fand ein von den beiden Mathematikern Felix Klein und Carl Runge sowie den Physikern Hermann Simon und Ludwig Prandtl geleitetes Seminar über Elektro-Technologie statt. Hilberts Forschung steuerte wichtige Beiträge zur Gastheorie und zur allgemeinen Relativitätstheorie bei. Sein Interesse an der Physik richtete sich auf die dort verwendeten mathematischen Strukturen. Er versuchte, Gebiete wie Thermodynamik oder Gravitation in mathematische Axiomensysteme einzubetten, aus denen neue physikalische Prinzipien folgen könnten. Nach ihm war »die Physik viel zu schwer für die Physiker«. In den 1970er Jahren brach die gemeinsame Seminartradition ab. Zurzeit greifen die Göttinger Professoren Detlev Buchholz aus der Theoretischen Physik und der Mathematiker Thomas Schick diese Tradition wieder auf und bieten gemeinsam das »Born-Hilbert Seminar in Mathematik und Physik« an.

International kooperieren

Neben der an sich weltweit angelegten Publikationstätigkeit in Fachzeitschriften wurden auch vor rund 100 Jahren die internationalen Verbindungen durch Kongress- und Vortragsreisen gefestigt. 1893 nahm Klein als Kommissar des Preußischen Kultusministers am Mathematiker-Kongress in Chicago (USA) anlässlich der Weltausstellung teil, weiter hielt er Vorträge an der Northwestern University in Evanston. Eine andere Einladung führte ihn 1896 nach Princeton. Ebenso reiste er zu Kollegen in Frankreich, Holland und England, auch im Zusammenhang mit der Gewinnung von Autoren für die von ihm herausgegebene Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Felix Klein bekam einen Ruf an die Yale University, den er ebenso ablehnte wie ein Angebot, in den USA als Austauschprofessor zu wirken. (Sein Kollege Carl Runge nahm diese Gelegenheit wahr.) Beim »2. Internationalen Mathematiker-Kongress« in Paris im Jahr 1900, an dem auch Minkowski teilnahm, hatte Hilbert einen zukunftsweisenden Auftritt mit seiner Liste ungelöster mathematischer Probleme. Schließlich wurde er auch Mitglied der »American Philosophical Society« (1932).

Nachwuchsförderung und Gleichstellung

Zu Hilberts Beerdigung schrieb der berühmte Schüler Minkowskis und dessen Nachfolger in Göttingen, Constantin Carathéodory (1873 – 1950): »Von allen Teilen der Welt strömten seine Schüler zusammen [..]. Göttingen wurde sozusagen der Sitz eines internationalen Mathematiker-Kongresses, der in Permanenz tagte.« An der Universität Göttingen bestanden für den wissenschaftlichen Nachwuchs auf dem Gebiet der Mathematik hervorragende Bedingungen, ein Kriterium, das auch bei der aktuellen Exzellenzinitiative 2006/2007 eine wichtige Rolle spielt. Damals beruhte dies auf der Anziehungskraft der Professoren und keineswegs darauf, dass allen diesen jungen Forschern bezahlte Stellen an der Universität in Aussicht gestanden hätten.

Dass die Gleichstellung der Frauen an deutschen Universitäten bis heute nicht selbstverständlich ist, zeigt ihre Erwähnung in den Richtlinien für die aktuelle Exzellenzinitiative. Damals gab es noch größere Hürden zu überwinden, wie Emmy Noethers Werdegang exemplarisch zeigt (vgl. dazu den Beitrag von Cordula Tollmien in diesem Heft). Unter den von Felix Klein in 27 Jahren betreuten 50 Doktoranden befanden sich zwei, bei David Hilberts 69 Doktoranden in 35 Jahren sechs Frauen. Das war nicht selbstverständlich für eine Zeit, in der das Frauenstudium gerade erst ermöglicht wurde (in Preußen 1908) und die selbstständige Lehre von Frauen sogar erst eine Dekade später zugelassen wurde (Emmy Noether 1919). Insbesondere Hilbert unterstützte ganz entschieden die Frauenemanzipation in der Wissenschaft.

Wettbewerb und Standortqualität

In einem Bericht von 1902 zu seinen USA-Reisen für das Ministerium schrieb Klein: »Denn das wissenschaftliche Leben bedarf zu fortgesetztem Gedeihen durchaus der Concurrenz. [...]« Damit meinte der Wissenschaftler vorrangig die Konkurrenz der Ideen, nicht einen Wettbewerb um Forschungsgelder. Damals kamen Ideengeber ausschließlich aus Universitäten in Europa und zunehmend aus den USA. Dennoch hatte Klein als Anregung mitgebracht, dass es nützlich sei, privates Kapital für die Wissenschaft zu mobilisieren. Zu diesem Zweck rief er im Jahr 1889 die »Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik« ins Leben (V. Böttinger, Norddeutscher Lloyd, Linde, Zeppelin). Sie wurde nach dem 1. Weltkrieg aufgelöst und ist in der Notgemeinschaft beziehungsweise in der Helmholtz-Gemeinschaft aufgegangen. Ebenso brachte er Vorstellungen zur Reform des Studiums und zur Beziehung zu den technischen Hochschulen mit. Zusammen mit Hilbert und Minkowski gründete Klein den ersten Lehrstuhl für angewandte Mathematik in Deutschland (1904), auf den Carl Runge (1856 – 1927) berufen wurde (Runge-Kutta-Verfahren). Klein, Hilbert und Minkowski gehörten auch zu den Gründungsmitgliedern der »Deutschen Mathematiker-Vereinigung« (1890). Zweifellos dachte Klein intensiv über die Breitenwirkung seines Faches nach und handelte entsprechend.

Zu »Verbreiterung der Standortqualität« zähle ich auch das Wirken im Publikationswesen über die Forschungsartikel hinaus. Aus Ausarbeitungen von Vorlesungen Felix Kleins und David Hilberts gingen zahlreiche bedeutende Monografien und Lehrbücher hervor, bei denen Assistenten und Mitarbeiter als Koautoren auftraten. Als Beispiele seien Kleins »Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus« (mit Ernst Hellinger) und Hilberts zweibändige »Methoden der mathematischen Physik« (mit Richard Courant) genannt. Nicht nur seine Vorlesungen lagen Klein am Herzen, sondern auch die Arbeitsatmosphäre der Studierenden. Er gründete für sie (und die Dozenten) das »Mathematische Lesezimmer« mit einer Präsenzbibliothek. Es wurde von einem Assistenten betreut und hielt insbesondere die ausländische Literatur bereit. Außerdem gab er Studienpläne heraus.

Auch die Ausstrahlung über die Universität hinaus auf die Lehrerbildung und die Schulreform muss erwähnt werden: Im Jahr 1892 führte Klein Fortbildungs-Ferienkurse für Mathematik- und Physiklehrer ein, zunächst in zweijährigem Turnus. Im Oster-Ferienkurs 1898 zu den Grundlagen der Geometrie las Hilbert »Über den Begriff des Unendlichen«. In den 1930er Jahren berichtete dann der Hilbert-Schüler Hermann Weyl über neue Entwicklungen in der theoretischen Kosmologie. Klein war 1908 an der Gründung der »Internationalen mathematischen Unterrichtskommission« (IMUK) beteiligt, die eine Bestandsaufnahme des Mathematikunterrichts vornehmen wollte, um die Unterrichtsmethoden und -inhalte zu verbessern. Sie besteht als »International Commission for Mathematical Instruction« (ICMI) noch heute. Außerdem beeinflusste Klein die »Meraner Beschlüsse zur Einführung der Differential- und Integralrechnung im Gymnasium« (1905).

Und heute?

Aus den Ausführungen über David Hilbert, Hermann Minkowski und Felix Klein wird deutlich, dass in Göttingen die Exzellenzkriterien von 2006/2007 schon im ersten Drittel des 20. Jahrhunderts mit Bravour erfüllt wurden. Können wir aus der Exzellenz von damals etwas lernen, obgleich die Situation heute eine völlig andere ist? Nicht nur hat sich die »manpower« in der mathematischen Forschung enorm vergrößert, sondern der Wettbewerb der Ideen umfasst die ganze Welt. Neben einer vermehrten Zahl von staatlichen Universitäten existieren in Deutschland mindestens eine private mit einem Mathematik-Department (Bremen), sowie zwei mathematische Max-Planck-Institute ohne Lehrverpflichtungen. Die politische Rede vom »Wettbewerb« zwischen den Universitäten zielt weniger auf die Wissensproduktion als auf die Vermarktung der Ergebnisse. Einen freien »Markt« für Wissensproduktion in der mathematischen Grundlagenforschung im Sinne von Angebot und Nachfrage kann es nicht geben: »Der Geist weht, wo er will!« Beschränkt man sich auf den »Markt« für Wissensproduzenten, so ist auch dieser durch ein Korsett staatlicher Regelungen und durch die Unterfinanzierung der Universität recht eingeschränkt. Auch die Forschungsfinanzierung hat sich enorm gewandelt. Ihre Aufgabe war es seit jeher, einen optimalen Ausgleich zwischen der Förderung der kreativen Persönlichkeit und der des unerlässlichen institutionellen Rahmens zu finden. Immer wieder neu muss definiert werden, wie sich Individuum und organisatorische Struktur in produktiver Weise verbinden können. Innovationsbarrieren können sich der Wissensproduktion von beiden Seiten her in den Weg stellen; akteursbedingte aus der Persönlichkeit des Forschers oder systeminterne, das heißt organisatorische. Das können insbesondere eine dem Fach von der Universität eingeräumte zu geringe Priorität, forschungsferne, sich ständig ändernde Vorgaben in der Ausbildung, mangelnde Ausstattung und daher permanente Bemühungen zur Drittmittelbeschaffung sein.

Foto: Marc-Oliver Schulz

Die Universalität der Wissensproduktion, wie sie ein Hilbert leistete, ist heute nicht mehr möglich: Zu stark ist die fachliche Differenzierung fortgeschritten. Die Projektforschung mit ihren kooperativen Notwendigkeiten ist gegenwärtig in den Vordergrund der Forschungsorganisation gerückt, obwohl in der Mathematik – im Vergleich zur Physik – noch eher eine »Forschung des Einzelnen« möglich ist. Am Beweis der Fermatschen Vermutung durch Andrew Wiles beziehungsweise der Poincaréschen durch Grigori J. Perelman zeigt sich das. Das Mathematische Institut ist, ganz in der Tradition von Felix Klein, an einer Vielzahl von Forschungsinitiativen beteiligt. Es sind dies Graduiertenkollegs der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) und DFG-Sonderforschungsbereiche, Exzellenzcluster, Forschergruppen, Nachwuchsprogramme, Gastprogramme und Industriekooperationen. Im Rahmen der gegenwärtigen Exzellenzinitiative wurde zusätzlich ein Courant Forschungszentrum »Strukturen höherer Ordnung in der Mathematik« mit drei Untergruppen für Nachwuchsforscher eingeworben; an einem davon ist die Theoretische Physik beteiligt. Die neu geschaffenen Einheiten können eine Vielzahl von Gästen mit Spezialkenntnissen für kürzere Zeit aufnehmen.

Die geschichtliche Situation von Klein, Hilbert und Minkowski kann nicht wiederkehren. Doch muss man Carathéodory energisch widersprechen, der anlässlich des Begräbnisses von Hilbert unter den traurigen Verhältnissen von 1943 geklagt hatte, »die letzte Blütezeit für die Mathematik in Göttingen« sei vorbei. Vor dem Hintergrund der durch die Exzellenzinitiative gebotenen verbesserten Rahmenbedingungen ist zu hoffen und zu wünschen, dass die nächste Blütezeit für innovative Forschung auf Weltniveau durch die Professoren und Nachwuchswissenschaftler der Mathematischen Fakultät schon begonnen hat.

Literatur:

C. Reid: Hilbert. Heidelberg: Springer 1970. R. Tobies: Felix Klein. Leipzig: Teubner 1990. D. Hilbert: Hermann Minkowski. Mathematische Annalen 68, 445-471 (1910).

The article recalls the situation of mathematics at the University of Göttingen in the first third of the 20th century. At the time, the interplay of the Prussian Ministry for Culture with the Philosophical Faculty of the University established Göttingen as a mathematical centre in Germany. Looking back while bearing in mind the criteria of the recent »Initiative for Excellence« – a competition for funds among German universities – we show how magnificently these were met at that time by the University and its famous mathematicians.

Besides their research in pure mathematics with its worldwide acclaim, the area of mathematical physics attracted Felix Klein (1849 – 1925), David Hilbert (1862 – 1943) and Hermann Minkowski (1864 – 1909). All three made important contributions in this field. Best known are the Hilbert space, the state space of non-relativistic quantum theory, and Minkowski space, the union of space and time into a 4-dimensional manifold fundamental for special and general relativity. Since 1850, a small »Mathematical Physics Institute« had existed, holding regular seminars for physicists and mathematicians for discussion of their recent progress. In 1905, a seminar on »electron theory« was given by the mathematicians Hilbert, Minkowski, Herglotz, and geophysicist Wiechert, as well as a seminar on »electro-technology« in which the mathematicians Klein and Runge were joined by applied physicists Ludwig Prandtl and Hermann Simon. This seminar tradition has recently been reinstated.

As far as international contacts were concerned, Klein's were particularly numerous. In 1893 he travelled to the United States to take part in a congress of mathematicians in Chicago, on the occasion of the world fair. He visited the University of Princeton in 1896 and declined a professorship at Yale University. His relations with colleagues in Europe prompted journeys to France, England, and the Netherlands, partially in connection with his editorship of the multi-volume »Encyclopedia of Mathematics«. With his renowned enumeration of unsolved mathematical problems, Hilbert made an influential appearance at the »International Congress of Mathematicians« in Paris in 1900.

Through the importance of their results, the three mathematicians attracted a large number of students. Klein and Hilbert had a total of 119 PhD students among them, including 8 women – at a time when university studies in Prussia had only recently been opened up to women (1908). Like Hilbert, Klein stressed the importance of teaching; he also inaugurated a »mathematical reading room« for students and lecturers, making textbooks and recent issues of journals available. From Klein's and Hilbert's courses, numerous books co-authored by assistants emerged. Advanced training for high school teachers was offered in lectures given during school holidays. With a view to obtaining financial support from industry, Klein created the »Göttingen Association for the Advancement of Applied Physics and Mathematics«. Along with Hilbert and Minkowski, he was a founder member of the »German Mathematical Society« and worked untiringly to spread the culture of mathematics.

Today, due to increasing differentiation in the field Hilbert's universality of scientific production seems no longer possible. The work force in mathematics has increased enormously and is spread around the globe. Universities are treated more and more as mere economic units, as if there were a market for scientific production in pure mathematics. Mathematics in Göttingen has succeeded in winning financial support in the »Initiative for Excellence« and is setting up a Courant Centre »Higher Order Structures in Mathematics« with theoretical physicists also taking part. Although already involved in many fruitful cooperative research projects financed by the German Research Foundation, it is to be hoped that the additional input will help the Mathematics Faculty to reach a new peak in internationally acclaimed scientific production.

Prof. Dr. Hubert Goenner, Jahrgang 1936, studierte Physik und Mathematik an den Universitäten Tübingen, Göttingen, Braunschweig und Freiburg und schloss sein Studium 1962 ab. 1966 wurde er in Freiburg promoviert, 1973 in Göttingen habilitiert. Auslandsaufenthalte führten ihn an Universitäten in den USA, Kanada und Australien. Hubert Goenner ist seit 1978 Professor an der Göttinger Fakultät für Physik und in der Philosophischen Fakultät kooptiert. Der Physiker forschte am Hermann-Föttinger-Institut für Fluid- und Thermodynamik der Technischen Universität Berlin sowie am Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte, Berlin. Von 1996 bis 2005 war Prof. Goenner Mitglied des Fachbeirats des Max-Planck-Instituts für Gravitationsphysik, Golm. Er leitete 1997/98 das Göttinger Institut für Wissenschaftsgeschichte, gehörte von 1994 bis 2001 der Haushalts- und Planungskommission des Senats und 1998/99 dem Senat der Universität Göttingen an. Der Autor von fünf Sachbüchern ist seit 2002 im »aktiven Ruhestand«. Seine Forschungsschwerpunkte sind Finsler Geometrie, Relativistische Gravitationstheorien sowie die Wissenschaftsgeschichte im Umkreis des Faches.

Emmy Noether,
wahrscheinlich um 1907
Foto: Sammlung
Ilse Sponsel, Erlangen

Weibliches Genie

Frau und Mathematiker: Emmy Noether

Cordula Tollmien

»Du warst eine große Mathematikerin, ich trage keine Bedenken zu sagen, die größte, von der die Geschichte zu berichten weiß. […] Die Macht Deines Genies schien insbesondere die Grenzen Deines Geschlechts gesprengt zu haben. Darum nannten wir Dich in Göttingen meist, in ehrfürchtigem Spott, den Noether« – so Hermann Weyl, ehemaliger Göttinger Kollege und Freund und wie Emmy Noether 1933 aus Deutschland in die USA emigriert, in seiner Rede bei der Trauerfeier für Emmy Noether in Bryn Mawr am 17. April 1935.

Schon die Zeitgenossen waren sich – und das nicht erst nach ihrem überraschenden Tod am 14. April 1935 – einig über die herausragende Bedeutung Emmy Noethers als Mathematikerin, darüber, dass sie die moderne Mathematik nicht nur verändert, sondern wesentlich mitgeschaffen hatte. Aber man(n) stimmte auch darin überein, dass diese Genialität im Körper einer Frau etwas Ungewöhnliches, ja fast etwas Ungehöriges war. Weyl ging sogar noch weiter: Es war, so sagte er in seiner Grabrede, als sprengte die »urwüchsige, produktive Gestalt Deines mathematischen Denkens« wie »eine fast zu pralle Frucht, die Schale Deiner Menschlichkeit«. Er gibt Noethers Genie damit etwas Übermenschliches, Gewaltiges, Rücksichtsloses: »die Sache, um die es ging, kommandierte allein.« Nichts Behutsames habe es in Emmy Noether gegeben, nichts Zartes, nichts Harmonisches: »ein Brocken menschlichen Urgesteins.«

Weyl kontrastiert dieses titanenhafte Bild, das zweifelsohne auch von echter Verehrung zeugt, klassischerweise mit dem der sorgenden Mutter: »Und doch warst Du eine mütterliche Frau mit einem warmen Kinderherzen. Deinen Schülern hast Du nicht nur im Geiste gegeben, ohne Rückhalt und aus der Fülle, sondern sie scharten sich um Dich wie Küchlein unter den Flügeln einer großen Klucke. Du liebtest sie, sorgtest um sie und lebtest mit ihnen in enger Gemeinschaft.«

Es steht außer Frage, dass diese Beschreibung zutreffend ist: Alle ihre Schüler berichten von Emmy Noethers Freundlichkeit, ihrer Hilfsbereitschaft, ihrer Sorge um deren Fortkommen, die sogar so weit ging, dass sie ihren Schülern bei Publikationen den Vortritt ließ. Stadtbekannt waren in Göttingen ihre unkonventionellen Treffen mit ihren Studenten und Gasthörern, die aus ganz Europa, den Vereinigten Staaten, der Sowjetunion, aus Palästina, ja sogar aus China und Japan, nach Göttingen kamen, um mit Emmy Noether zu arbeiten. Wenn sie mit ihren Schülern durch Göttingen zog – sie diskutierte Mathematik gern und ausgiebig auf Spaziergängen – sah manch Göttinger missbilligend auf diese in den Augen der braven Bürger noch nicht einmal anständig gekleidete Truppe, die man die Noether-Boys nannte: die Männer häufig in Hemdsärmeln ohne Jackett, Emmy Noether in bequemen Schuhen und einem weiten Kleid, einen Schirm schwenkend, der vielleicht sogar wieder einmal kaputt war, laut redend, ausladend gestikulierend.

Auch heute noch, über 70 Jahre nach Emmy Noethers Tod, 100 Jahre nach dem Beginn des Frauenstudiums in Preußen-Deutschland und zehn Jahre, nachdem die Deutsche Forschungsgemeinschaft ihr Förderprogramm für herausragende junge Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler nach Emmy Noether benannt hat, kann man über Emmy Noether nicht reden, ohne sich auf ihr Frausein zu beziehen. Und dies ist nicht nur der Tatsache geschuldet, dass dieses Frausein ihren akademischen Werdegang maßgeblich behindert hat (in den Anfangsjahren sogar mehr als ihr Jüdischsein), sondern auch dem Umstand, dass der Mythos von dem vermeintlich unweiblichen Genie Emmy Noether noch immer lebendig ist – so lebendig, dass er beispielsweise ungebrochen Michael Köhlmeiers 2007 erschienenen, fast 800-seiti-

> »Fräulein Noether ist eine große Persönlichkeit; die größte Mathematikerin, die je gelebt hat; und die größte heute lebende Wissenschaftlerin überhaupt, eine Gelehrte mindestens auf der Ebene von Marie Curie. Von der Geschlechterfrage ganz abgesehen, ist sie eine von den zehn oder zwölf führenden Mathematikern der heutigen Generation in der ganzen Welt.«
>
> *Der amerikanische Mathematiker Norbert Wiener in einem Gutachten über Emmy Noether für die Rockefeller-Stiftung, 2. Januar 1935*

gen, von den Feuilletons hochgelobten Roman »Abendland« durchzieht. Köhlmeier macht Emmy Noether in seinem Roman zu einer repräsentativen Figur der europäischen Geschichte des 20. Jahrhunderts, was insofern stimmig ist, als dieses Jahrhundert als das Jahrhundert der (Emanzipation der) Frau angesehen werden kann und Emmy Noether zudem als Jüdin für die zivilisatorische Katastrophe des 20. Jahrhunderts steht. Im 20. Jahrhundert erfolgte darüber hinaus auch eine bisher nicht gekannte Mathematisierung der Welt, eine umfassende mathematische Durchdringung unserer unmittelbaren Umwelt. Köhlmeier streift allerdings Emmy Noethers mathematische Bedeutung nur kursorisch und macht sie stattdessen zum Zentrum eines Diskurses über Hässlichkeit, der sich an ihrem exzessiv beschriebenen Dicksein entzündet. Und nicht nur das: Er behauptet, sie habe an diesem angeblichen Hässlichsein gelitten (wofür es in den allerdings nur spärlichen persönlichen Zeugnissen aus Emmy Noethers Leben im Übrigen keinerlei Hinweise gibt) und macht sie damit nicht nur – wie Weyl – zur trotz allem mütterlichen Frau, sondern auch noch zu einer Frau, die wie alle Frauen letztendlich an ihrem ungenügenden eigenen Äußeren (ver)zweifelt. So wandelt sich Emmy Noether von Weyl zu Köhlmeier von einem genialen Urgestein, das außerhalb seines Geschlechts steht, zu einem zutiefst verunsicherten weiblichen Wesen, das auch Genie hat.

Emmy Noethers Lebensweg in Kürze

Emmy Noether wurde als älteste Tochter des bekannten Mathematikers Max Noether am 23. März 1882 in Erlangen geboren. Ihr folgten drei Brüder, von denen der zwei Jahre jüngere Fritz Noether ebenfalls Mathematiker wurde. Sie erhielt zunächst die übliche, damals für bürgerliche Mädchen vorgesehene Ausbildung und legte Ostern 1900 die bayrische Staatsprüfung für Lehrerinnen in Englisch und Französisch ab. Damit gab sie sich jedoch nicht zufrieden, sondern schrieb sich anschließend als Gasthörerin an der Erlanger Universität ein und bereitete sich so auf die Reifeprüfung vor, die sie im Juli 1903 am königlichen Realgymnasium in Nürnberg als Externe ablegte. Schon vor ihrer Lehrerinnenprüfung hatte sie zusätzlich privaten Mathematikunterricht erhalten und auch während ihrer Gasthörerinnenzeit mathematische Vorlesungen gehört. Nach dem Abitur zog es sie dann direkt in die »Hochburg der Mathematik«, nach Göttingen. Dort lehrten damals Felix Klein, ein guter Freund Max Noethers und engagierter Förderer des Frauenstudiums, und David Hilbert, der durch seine damals noch neuen axiomatischen mathematischen Methoden Emmy Noethers spätere wissenschaftliche Fragestellungen nachhaltig beeinflusste.

Doch nach einer schweren Erkrankung im Frühjahr 1904 musste Emmy Noether zunächst nach Erlangen zurückkehren, wo sie ihr Studium im Wintersemester 1904/05 fortsetzte – diesmal als reguläre Studentin, denn Bayern hatte seine Universitäten schon im Wintersemester 1903/04 für Frauen geöffnet. Sie studierte hauptsächlich bei ihrem Vater und bei Paul Gordan, bei dem sie nach nur sechs Semestern 1907 mit einer Arbeit aus dem Gebiet der Invariantentheorie »summa cum laude« promovierte.

Bereits ein Jahr nach ihrer Promotion wurde Emmy Noether zum Mitglied des Circolo Matematico di Palermo gewählt und 1909 auch in die renommierte Deutsche Mathematiker-Vereinigung aufgenommen, auf deren Jahresversammlung in Salzburg sie bereits im selben Jahr ihren ersten Vortrag hielt. Im Übrigen aber arbeitete sie acht Jahre lang am Mathematischen Institut in Erlangen (unter anderem auch bei der Betreuung von Doktoranden) ohne Anstellung oder Vertrag, das heißt also ohne jede Vergütung. Sie unterstützte dabei sowohl ihren Vater als auch Gordans Nachfolger Ernst Fischer, der der Hilbert-Schule zuzurechnen ist und Emmy Noether den entscheidenden Anstoß zu ihrer Beschäftigung mit abstrakter Algebra gab.

Emmy Noether im Kreise von Schülern, Kollegen und Freunden aus dem In- und Ausland in Göttingen (Friedländer Weg) im Sommer 1931. Identifizieren lassen sich der französische Mathematiker Paul Duriell (zweiter von rechts) und seine Frau, der Assistent von Edmund Landau, Hans Heinrich Heilbronn (rechts neben Emmy Noether), Kurt Mahler (ganz rechts) und Max Zorn (zweiter von links), die beide wie Emmy Noether aus NS-Deutschland emigrieren mussten.
Foto: Bildarchiv des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach

Nachdem Emmy Noether bereits 1913/14 ihren wissenschaftlichen und persönlichen Kontakt zu Hilbert und Klein intensiviert hatte, siedelte sie 1915 endgültig nach Göttingen über – mit nichts in der Hand als der Aussicht auf eine interessante und befriedigende wissenschaftliche Zusammenarbeit mit Hilbert und Klein, die damals gerade mit der Einsteinschen Relativitätstheorie beschäftigt waren und in diesem Zusammenhang von Emmy Noethers Kenntnissen in der Invariantentheorie profitieren wollten. Denn eine ihren wissenschaftlichen Leistungen angemessene Stellung an der Universität konnten ihr Hilbert und Klein natürlich auch in Göttingen nicht bieten. Doch sie versuchten zumindest die Voraussetzungen dafür zu schaffen, indem sie Emmy Noether ermunterten, bereits im Juli 1915 einen Antrag auf Habilitation zu stellen. Das Problem war nur, dass in Preußen 1907 die Habilitation von Frauen an den Universitäten schon einmal ausführlich diskutiert und abgelehnt worden war, was der Minister für geistliche und Unterrichtsangelegenheiten in einem Erlass vom 29. Mai 1908 festgeschrieben hatte. Das Habilitationsverfahren Emmy Noethers brauchte daher insgesamt drei Anläufe und zog sich bis zum Mai 1919 hin.

Im Juli 1915 stellte Emmy Noether ihren Antrag auf Habilitation. Auch den Mathematikern wäre es zwar, wie es etwa Edmund Landau in dankenswerter Offenheit formulierte, viel lieber gewesen, wenn es sich bei Emmy Noether um einen Mann gehandelt hätte (er halte das weibliche Gehirn für ungeeignet zur mathematischen Produktion und Emmy Noether für eine der seltenen Ausnahmen, schrieb Landau), aber sie befürworteten den Antrag dennoch einmütig, und mehrheitlich tat dies auch die gesamte Mathematisch-naturwissenschaftliche Abteilung der Philosophischen Fakultät. Gegen den Antrag sprachen sich allerdings fast alle Mitglieder der Historisch-philologischen Abteilung aus, die jedoch wenigstens nicht verhinderten, dass ein Gesuch um eine Ausnahmegenehmigung für Emmy Noether an das Ministerium weitergeleitet wurde. Auf dieses Gesuch reagierte das Ministerium jedoch einfach nicht, so dass zwei Jahre lang erst einmal praktisch nichts geschah. Hilbert erreichte durch ein persönliches Gespräch beim Minister lediglich, dass Emmy Noether unter seinem Namen Seminare anbieten konnte, und setzte sogar durch, dass sie namentlich im Vorlesungsverzeichnis genannt wurde. Erst nachdem im Sommer 1917 die Mathematisch-naturwissenschaftliche Abteilung in der Habilitationssache Noether noch einmal nachgefragt hatte, teilte der Minister am 5. November 1917 mit, dass die Frage der Frauenhabilitation nur grundsätzlich entschieden werden könne und er deshalb, »selbst wenn im Einzelfall dadurch gewisse Härten unvermeidbar sind«, die Zulassung von Ausnahmen nicht genehmigen könne.

Bemerkenswerterweise kam der Anstoß, nach dem Krieg erneut einen Habilitationsantrag für Emmy Noether zu stellen, nicht von ihren Göttinger Kollegen, sondern von Albert Einstein, der sie durch ihre Zusammenarbeit mit Hilbert und Klein in Fragen der Gravitations- und Relativitätstheorie kennen- und schätzen gelernt hatte. Auf eine entsprechende Nachfrage Einsteins bei Klein

Emmy Noether mit ihren drei Brüdern (Fritz Noether sitzend), vor 1918
Foto: Sammlung Ilse Sponsel, Erlangen

»Ich habe bisher, was produktive Leistungen betrifft die schlechtesten Erfahrungen in Bezug auf die studierenden Damen gemacht und halte das weibliche Gehirn für ungeeignet zur mathematischen Produktion, Frl. Noether halte ich aber für eine der seltenen Ausnahmen.«
Der Göttinger Mathematiker Edmund Landau in seinem Gutachten für die Habilitation von Emmy Noether, 1. August 1915

Emmy Noether mit ihrem Bruder Fritz an der Ostsee, Sommer 1933
Foto: Sammlung Ilse Sponsel, Erlangen

vom 27. Dezember 1918 wurde dieser sofort tätig, und am 15. Februar 1919 stellte die Mathematisch-naturwissenschaftliche Abteilung beim Ministerium erneut einen Antrag auf Habilitation von Emmy Noether – wieder beantragte sie nur eine Ausnahmegenehmigung, da der Erlass vom Mai 1908 immer noch in Kraft war. Diesmal wurde diese jedoch endlich erteilt, und zwar am 8. Mai 1919. Danach wurde das Habilitationsverfahren für Emmy Noether in bemerkenswerter Schnelligkeit abgewickelt: Nachdem eine bereits im Juli 1918 der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegte Arbeit als Habilitationsschrift anerkannt worden war, wurde sie am 4. Juni 1919 als Privatdozentin in Göttingen zugelassen. Emmy Noether war damit die erste an der Göttinger Universität habilitierte Frau – und eine von fünf Frauen im gesamten Deutschen Reich, die noch vor dem offiziellen Erlass vom 21. Februar 1920 habilitiert wurden, der Frauen endlich generell und allgemein das Recht auf Habilitation zusprach. Im Herbst-Zwischensemester 1919, das für die Kriegsheimkehrer vom 22. September bis zum 20. Dezember angesetzt worden war, konnte Emmy Noether zum ersten Mal eine Lehrveranstaltung unter ihrem eigenen Namen ankündigen.

Emmy Noethers weitere berufliche Karriere ist schnell wiedergegeben: Im April 1922 erhielt sie den Titel eines »nicht-beamteten außerordentlichen Professors«, immerhin unter Verkürzung der eigentlich als Voraussetzung geforderten mindestens sechs Jahre dauernden Privatdozentenzeit. Doch mit diesem Titel war keinerlei Vergütung verbunden. Emmy Noether war bis dahin auf die Unterstützung ihres Vaters angewiesen gewesen und lebte nach dessen Tod 1921 von einem kleinen geerbten Vermögen, das durch die steigende Inflation langsam aufgezehrt wurde. Erstmals im Sommersemester 1923 erhielt sie deshalb einen gering, aber immerhin überhaupt dotierten Lehrauftrag. Und dieser Lehrauftrag, der jedes Semester erneuert werden musste, bezeichnet nun nicht etwa den Anfang, sondern das Ende ihrer universitären Karriere. Emmy Noether, die in den 1920er Jahren unter den Göttinger Mathematikern zweifellos die produktivste war, erhielt nie einen Ruf an eine deutsche Universität, wurde nicht in die Göttinger Akademie der Wissenschaften aufgenommen und noch nicht einmal Redaktionsmitglied der Mathematischen Annalen, obwohl sie nicht nur einige ihrer wichtigsten Arbeiten in dieser Zeitschrift veröffentlichte, sondern für die Annalen auch eine Vielzahl von Arbeiten anderer redigierte. Sie vertrat lediglich im Sommersemester 1930 den Zahlentheoretiker Carl Ludwig Siegel auf seinem Frankfurter Lehrstuhl, während dieser in Göttingen las, und verbrachte auf Einladung ihrer russischen Mathematikerfreunde 1928/29 ein Studienjahr in Moskau, in dem sie auch Vorlesungen hielt.

Das einzige Mal, dass man Emmy Noether in Deutschland ohne jede Einschränkung ihren männlichen Kollegen gleichstellte, war, als die Nationalsozialisten sie aufgrund des Gesetzes zur »Wiederherstellung des Berufsbeamtentums« vom 7. April 1933 am 25. April 1933 von ihrer Tätigkeit an der Universität beurlaubten, obwohl sie als nicht verbeamtete Professorin zu diesem Zeitpunkt streng genommen vom Gesetz noch gar nicht betroffen war. Emmy Noether gehörte damit zu den ersten sechs jüdischen Wissenschaftlern, denen untersagt wurde, weiter an der Göttinger Universität zu lehren. Über ihre ausländischen wissenschaftlichen Freunde gelang ihr die Emigration in die USA, und als Gastprofessorin in Bryn Mawr erhielt Emmy Noether dann erstmals in ihrem Leben ein Gehalt, das mehr war als nur ein Almosen.

Eins ist jedoch wichtig festzuhalten: Emmy Noethers Außenseiterposition innerhalb der akademischen Institutionen entsprach

»Alle Fakultätsmitglieder sind darüber einig, […] dass ein weiblicher Kopf nur ganz ausnahmsweise schöpferische wissenschaftliche Leistungen hervorbringen wird. Besonders aber zur ununterbrochenen Lehrtätigkeit vor unseren Studenten ist eine Frau wegen der mit dem weiblichen Organismus zusammenhängenden Erscheinungen überhaupt nicht geeignet.«
Sondervotum gegen die Habilitation von Emmy Noether, 19. November 1915

nicht ihrer Stellung in der *scientific community*. Für ihre neuen wissenschaftlichen Erkenntnisse und Methoden fand sie Anerkennung nicht nur bei ihren Göttinger Kollegen, sondern bei Mathematikern in der ganzen Welt. Einstein lobte ihren Beitrag zur Invariantentheorie, dem wir das heute so genannte Noether-Theorem verdanken, das den Schlüssel für die Beziehung zwischen Symmetrie- und Erhaltungsgesetzen in der Physik lieferte und in der mathematischen Physik eine bedeutende Rolle spielt. 1921 legte Emmy Noether ihre grundlegende Arbeit mit dem Titel »Idealtheorie in Ringbereichen« vor, die der niederländische Mathematiker Bartel van der Waerden, der Emmy Noether 1924 in Göttingen kennengelernt hatte und von ihr nachhaltig beeinflusst wurde, in seinem Nachruf auf sie 1935 bereits als »klassisch« bezeichnete. Sie definierte darin grundlegende Begriffe der kommutativen Algebra und nach Meinung vieler heutiger Mathematiker begann die abstrakte Algebra als eigenständige Disziplin überhaupt erst mit dieser Arbeit. 1932 ehrte man sie, indem sie auf dem Internationalen Mathematikerkongress in Zürich als erste und einzige Frau überhaupt das Hauptreferat halten durfte. Sie entwickelte darin ein Programm, das ihrer Überzeugung Ausdruck verlieh, dass die nichtkommutative Algebra, der sie sich inzwischen zugewandt hatte, von einfacheren Gesetzen beherrscht werde als die kommutative. Dieser Vortrag wurde zu einem wahren Triumph für die von ihr vertretene, damals noch keineswegs überall anerkannte Forschungsrichtung.

Van der Waerden hat ein jedem Mathematiker bekanntes Lehrbuch über »Moderne Algebra« geschrieben, das 1930 erstmals erschien und danach immer wieder aufgelegt wurde. Dieses Buch baut unter anderem auf Vorlesungen von Emmy Noether auf und hat so weite Verbreitung gefunden wie kein anderes Werk über diesen Gegenstand. Es hat daher maßgeblich dazu beigetragen, dass Emmy Noethers mathematische Ideen sich in der nachfolgenden Mathematikergeneration durchsetzten. 1935 verfasste van der Waerden einen Nachruf auf Emmy Noether, in dem er ihr mathematisches Credo mit sehr schönen, auch für Nichtmathematiker verständlichen Worten zusammenfasste: »Die Maxime, von der sich Emmy Noether immer hat leiten lassen, könnte man folgendermaßen formulieren: ›Alle Beziehungen zwischen Zahlen, Funktionen und Operationen werden erst dann durchsichtig, verallgemeinerungsfähig und wirklich fruchtbar, wenn sie von ihren besonderen Objekten losgelöst und auf allgemeine begriffliche Zusammenhänge zurückgeführt sind.‹«

Uns ist die von Emmy Noether vertretene abstrakte, »begriffliche« Methode in der Algebra heute so selbstverständlich geworden, dass wir geneigt sind, diese Methode mit der Mathematik selbst gleichzusetzen. Dabei vergessen wir, dass sich dieser Standpunkt in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts erst allmählich durchsetzen musste, was maßgeblich Emmy Noether zu verdanken ist. Emmy Noethers Einfluss auf andere Mathematiker war so groß wie nur bei ganz wenigen anderen Mathematikern, Hilbert vielleicht ausgenommen. Dieser Einfluss beschränkte sich dabei keineswegs auf die Algebra, sondern schloss auch andere Fachrichtungen ein. »Meine Methoden sind Arbeits- und Auffassungsmethoden und daher anonym überall eingedrungen«, schrieb sie einmal erklärend dazu an ihren Freund, den Göttinger Mathematiker Helmut Hasse.

»Die Algebra hat ein anderes Gesicht bekommen durch Dein Werk«, sagte Weyl an ihrem Grab: »Mit vielen deutschen Buchstaben hat Du Deinen Namen in ihre Tafel unauslöschlich eingetragen. Vielleicht hat niemand so wie Du dazu beigetragen, die axiomatische Denkweise, die früher nur zur logischen Erhellung der Grundlagen benutzt wurde, in ein schlagkräftiges Instrument für die konkrete vorwärtsstrebende Forschung umzuformen.«

Emmy Noether in Bryn Mawr 1935
Foto: Sammlung Peter Roquette, Heidelberg

Hinweise:
Ich danke Andrea Albrecht, Universität Freiburg, für den Hinweis auf den Roman »Abendland« von Michael Köhlmeier und die fruchtbare Diskussion darüber. Die Arbeiten und Quelleneditionen von Peter Roquette zu Emmy Noether waren für diesen Aufsatz von großer Bedeutung. Zu weiteren Informationen über Emmy Noether siehe die ausführliche Darstellung zu Leben, Werk und Rezeptionsgeschichte auf www.tollmien.com.

Emmy Noether was born on March 23, 1882 in Erlangen, Germany and died 53 years later in exile in the USA, on April 14, 1935. These dates mark a life that was both unique and outstanding as well as typical and ordinary: exceptional because her mathematical achievements were superior – Noether is considered to have been the founder of modern abstract algebra – and typical because she faced the barriers that were common to all women and Jews seeking a place in the academic and intellectual world of her time.

Noether's first contact with Göttingen came in 1904, when she entered the University after completing her Abitur (the German high school diploma) and met David Hilbert. His new methods of axiomatic mathematics significantly influenced her own scientific inquiry and future development. However, for personal reasons she continued her studies in Erlangen, where she attained her doctor's degree in 1907. She continued to research and teach in Erlangen for many years, but was denied an official position or salary. Through the initiative of Felix Klein and David Hilbert she came to Göttingen in 1915, where, with only a few brief interruptions, she remained until 1933.

Emmy Noether's attempt to qualify for a professorship (Habilitation) was blocked by the Prussian Minister of Education, and only at the end of World War I, in May of 1919, was she able to complete her qualification. In April 1922 she was granted the title of ›außerordentlicher Professor‹ which came without any remuneration. So she applied for, and received, a minor teaching position for the 1923 summer semester, which brought in a small wage. This position, requiring renewal every semester, was not the beginning of her university career, but its peak.

Emmy Noether, without a doubt the most productive of the mathematicians at Göttingen in the 1920s and a worldwide magnet for mathematicians eager to work with her, was never to receive the offer of a professorship at any German university. Nor was she invited to become a member of the Göttingen Academy of Sciences. The only occasion when she was treated equally to her contemporary male mathematician colleagues was on April 25, 1933, when the National Socialists forced her to take a leave of absence and eventually to emigrate to the USA.

Today Emmy Noether, whose research covered almost the whole range of topics within the 19th and 20th century algebraic tradition, is recognized as the most significant female mathematician ever to have lived, and her core contribution to the development of modern mathematics is unquestioned. Although her mathematical genius was clearly acknowledged by her contemporaries, the earliest obituaries and most of the biographies written about her life included comments on her physical appearance, and point out her supposed lack of feminine charms. This image of Emmy Noether has been sustained in conscious memory, and she has even become a literary prototype of the masculine, ugly female genius, whose amorphous form is only counterbalanced and softened by a warm heart and a motherly spirit. So even today, this superior mathematician continues to be confined and judged within the narrow cultural boundaries of her sex, boundaries that impeded her in her lifetime from achieving an academic career equal to her abilities.

Dr. Cordula Tollmien, Jahrgang 1951, studierte von 1970 bis 1975 Mathematik und Physik an der Universität Göttingen. Nach dem Staatsexamen war sie Mitarbeiterin im DFG-Forschungsprojekt »Hochschuldidaktik« am IV. Physikalischen Institut der Universität. In der ersten Hälfte der 1980er Jahre veröffentlichte Cordula Tollmien erste schriftstellerische und historische Arbeiten. 1986 nahm sie ein Studium der Mittleren und Neueren Geschichte an der Universität Göttingen auf. Gleichzeitig erschien ihr erstes Kinderbuch »La gatta heißt Katze«, für das sie 1986 den Peter-Härtling-Preis zugesprochen bekam. Seitdem hat sie eine Vielzahl von Kinder- und Jugendbüchern veröffentlicht. Seit 1987 erschienen zahlreiche historische Arbeiten, unter anderem zur Geschichte der Göttinger Juden, außerdem Biographien von Emmy Noether, Sofja Kowalewskaja, Julia Lermontowa und Marie Curie. Von 1991 bis 1993 war Tollmien als wissenschaftliche Lektorin für die Hamburger Stiftung für Sozialgeschichte tätig. Ab 1994 forschte Tollmien für eine von der Stadt Göttingen in Auftrag gegebene Stadtgeschichte zum Thema Nationalsozialismus in Göttingen. Mit dem Ergebnis dieser Forschungen wurde sie 1998 von der Philosophischen Fakultät der Universität Göttingen promoviert. Für die Stadt Göttingen entstand zudem eine historische Studie über die in Göttingen beschäftigten NS-Zwangsarbeiter. Tollmiens ausführliche Biographie über Emmy Noether »Sind wir doch der Meinung, daß ein weiblicher Kopf nur ganz ausnahmsweise in der Mathematik schöpferisch tätig sein kann …« wird demnächst in überarbeiteter und wesentlich erweiterter Form neu erscheinen. Sie beschäftigt sich zurzeit mit der Erforschung des Freundinnenkreises um Sofja Kowalewskaja, also mit der Lebensgeschichte der Frauen, die im Zuge der russischen Bildungs- und Emanzipationsbewegung der 1860er Jahre nach Deutschland zum Studium kamen. Cordula Tollmien lebt als freiberufliche Schriftstellerin und Historikerin in Hann. Münden.

Sofja Kowalewskaja (1850 bis 1891) – die erste promovierte Mathematikerin und die erste Professorin im Europa der Neuzeit

Am 15. Januar 1850 als die zweite Tochter eines zaristischen Offiziers in Moskau geboren, verbrachte Sofja Korwin-Krukowskaja (so ihr Geburtsname) die prägenden Jahre ihrer Kindheit und Jugend auf dem väterlichen Landgut Palibino im Gouvernement Witebsk. Schon in jungen Jahren zeigte sich ihre mathematische Begabung, und sie ertrotzte von ihrem Vater eine mathematische Ausbildung bei verschiedenen Privatlehrern. Unter dem Einfluss ihrer älteren Schwester kam sie schon als junges Mädchen in Kontakt mit der so genannten nihilistischen Bewegung – einer aus dem Kampf gegen die Leibeigenschaft hervorgegangenen intellektuellen Jugendbewegung der 1860er Jahre in Russland, die sich gegen die konservativen Moralvorstellungen der Vätergeneration und die herrschenden verkrusteten politischen Strukturen wandte und sich insbesondere der Aufklärung und Ausbildung der Landbevölkerung und dem Kampf für die Emanzipation der Frauen verschrieben hatte. Um den Frauen auch gegen den Willen ihrer Väter eine wissenschaftliche Ausbildung zu ermöglichen, hatte sich bei den Nihilisten die Institution der Scheinehe etabliert. Ein zur »Befreiung der russischen Töchter« bereiter junger Mann heiratete eine studierwillige junge Frau und begleitete diese – da Frauen in Russland ein Studium nicht möglich war – nach der Eheschließung ins Ausland, damit sie dort ein Studium aufnehmen konnte. Die Eheleute lebten dort entweder wie Bruder und Schwester zusammen, oder aber der »fiktive Ehemann« verließ seine angetraute Ehefrau gleich nach der Eheschließung

Sofja Kowalewskaja nach 1880
Foto: Institut Mittag Leffler Djursholm, Schweden

und ließ sie ihre eigenen Weg gehen. 1868 lernte Sofja den späteren Paläontologen Wladimir Kowalewski kennen, der bereit war, sie unter den genannten Bedingungen zu heiraten. Im September 1868 heirateten sie und im April 1869 brachen sie gemeinsam nach Heidelberg auf, wo es Sofja gelang, die dortigen Professoren zu überreden, ihr den Besuch von Vorlesungen zu erlauben. Nach zwei Semestern in Heidelberg wechselte Sofja Kowalewskaja nach Berlin, wo sie Schülerin des seinerzeit bekanntesten deutschen Mathematikers Karl Weierstraß wurde, der ihr vier Jahre lang Privatunterricht erteilte. Auf Anregung und mit Unterstützung von Weierstraß beantragte Sofja Kowalewskaja im Sommer 1874 dann die Zulassung zur Promotion an der Göttinger Universität. Vorsichtshalber legte sie gleich drei eigenständige wissenschaftliche Abhandlungen vor: eine über partielle Differentialgleichungen, eine über Abelsche Integrale und eine dritte über die Gestalt der Saturnringe. Sofja beantragte außerdem die Befreiung von der mündlichen Prüfung, eine Vergünstigung, die zuvor schon einige englische und amerikanische Kandidaten in Anspruch genommen hatten und die man auch ihr – da ihre Arbeiten »weit über das Maß der an eine Dissertation zu stellenden Anforderungen« hinausgingen – gewährte. So wurde Sofja Kowalewskaja im Alter von 24 Jahren »in absentia« von der Universität Göttingen »summa cum laude« promoviert und seitdem ist ihr Name mit der Göttinger Universität verbunden, ohne dass sie jemals einen Fuß nach Göttingen gesetzt hätte.

Sofja Kowalewskaja war die erste Frau, die nach Dorothea Schlözer in Göttingen promoviert wurde. Sie war die erste Frau überhaupt, die einen Doktorgrad in der Mathematik erwarb, und sie war auch die erste Frau, die einen ordentlichen Lehrstuhl an einer Universität erhielt (1884 an der Universität Stockholm). Darüber hinaus war sie eine politisch sehr bewusste Frau, die sich aktiv für die Rechte aller Frauen auf Ausbildung einsetzte, und sie feierte nicht nur wissenschaftliche Triumphe (1888 verlieh ihr die Pariser Akademie der Wissenschaften für ihre Arbeit »Über die Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt unter dem Einfluss der Schwerkraft« den renommierten Bordin-Preis), sondern mit der Veröffentlichung ihrer Kindheitserinnerungen 1889 auch literarische. Am 10. Februar 1891 starb Sofja Kowalewskaja überraschend im Alter von nur 41 Jahren.

Cordula Tollmien

Carl Friedrich Gauß, am 30. April 1777 in Braunschweig geboren und seit frühester Jugend eine außergewöhnliche mathematische Begabung, entwickelte sich als Student in Göttingen (1795 – 1798), als junger Privatgelehrter in Braunschweig (1799 – 1807) und als Praktikant an der Sternwarte Seeberg (1803) immer mehr zum Astronomen und brachte es in diesem Fach schon in jungen Jahren zu Weltruhm. Im Juli 1807 wurde er als Professor für Astronomie und Direktor der Universitäts-Sternwarte nach Göttingen berufen. Hier wurde die Astronomie – neben der Geodäsie, der Mathematik und der Physik – endgültig zu Gauß' Hauptarbeitsgebiet. Unter Gauß' Direktion erlangte die Göttinger Sternwarte in den Jahren 1807 – 1855 Weltruhm und galt zu dieser Zeit als die bedeutendste in Deutschland. Im Folgenden wird über Leben und Werk von Gauß als Astronom und Geodät berichtet, beides Wissenschaften, die ohne solide mathematische Grundlagen nicht existieren könnten. Gauß, der zweimal verheiratet war und im Privatleben außergewöhnlich viel persönliches Leid erdulden musste, starb hochgeehrt im Alter von fast 78 Jahren. Das Gesamtwerk von Gauß bleibt legendär und ist auch heute noch bei Weitem nicht in allen Einzelheiten erforscht und verstanden. Die Göttinger Universitäts-Sternwarte versinnbildlicht als nationales Denkmal das Leben und das Werk von Carl Friedrich Gauß als Astronom, Physiker und Mathematiker für alle Zeiten.

Sterne, Zahlen und Dreiecke

Carl Friedrich Gauß – der Fürst der Mathematik als Astronom und Geodät

Axel Wittmann

Gauß’ Jugend und Studienzeit

Am 25. November 1804 schrieb Carl Friedrich Gauß an seinen Studienfreund Farkas Bolyai: *» ... die praktische Astronomie: sie ist nach meinem Gefühle, nächst den Freuden des Herzens und der Beschauung der Wahrheit in der reinen Mathesis der süsseste Genuss, den wir auf Erden haben können.«* Gauß’ Unterstreichung kennzeichnet, wo er die Prioritäten setzt. Schon während seines Studiums in Göttingen (1795 – 1798) hatte Gauß sein Interesse zunehmend der Astronomie zugewandt, und zwar nicht nur der theoretischen, rechnenden, sondern auch der praktischen, beobachtenden Astronomie: Diese Kombination ist eher selten, da sie zwei miteinander fast unvereinbare Talente in einer Person voraussetzt.

Carl Friedrich Gauß wurde am 30. April 1777 im Hause seiner Eltern in Braunschweig geboren. Der schöne Fachwerkbau (Abb. 1) wurde im 2. Weltkrieg zerstört. Gauß stammte aus einfachen mittelständischen Verhältnissen: Der Vater, Gebhard Gauß, war Hausbesitzer und übte mehrere qualifizierte Handwerksberufe gleichzeitig aus; außerdem war er noch so etwas wie ein Versicherungsagent. Carl Friedrich, sein einziger Sohn aus zweiter Ehe, zeigte sein Rechentalent schon als Dreijähriger, indem er eine fehlerhafte Abrechnung seines Vaters, die dieser bei der Auszahlung des Wochenlohnes an seine Gesellen verlas, mit dünnem Stimmchen aus dem Hintergrund korrigierte. Und natürlich hatte er recht. Gauß erzählte später im Scherz, er habe eher rechnen als sprechen gelernt, und seine schnelle Lösung der berühmten arithmetischen Summationsaufgabe (Summe der Zahlen von 1 bis 100) als Schüler der Büttnerschen Schreib- und Rechenschule in Braunschweig ist legendär. Viel später, in einem Brief an Heinrich Christian Schumacher vom 6. Januar 1842, äußerte Gauß sich zu seinen Fähigkeiten im Kopfrechnen wie folgt: *»Uebrigens habe ich niemahls Rechnungsfertigkeit absichtlich irgendwie cultivirt, sonst hätte sie sich ohne Zweifel viel weiter treiben lassen; ich lege da-*

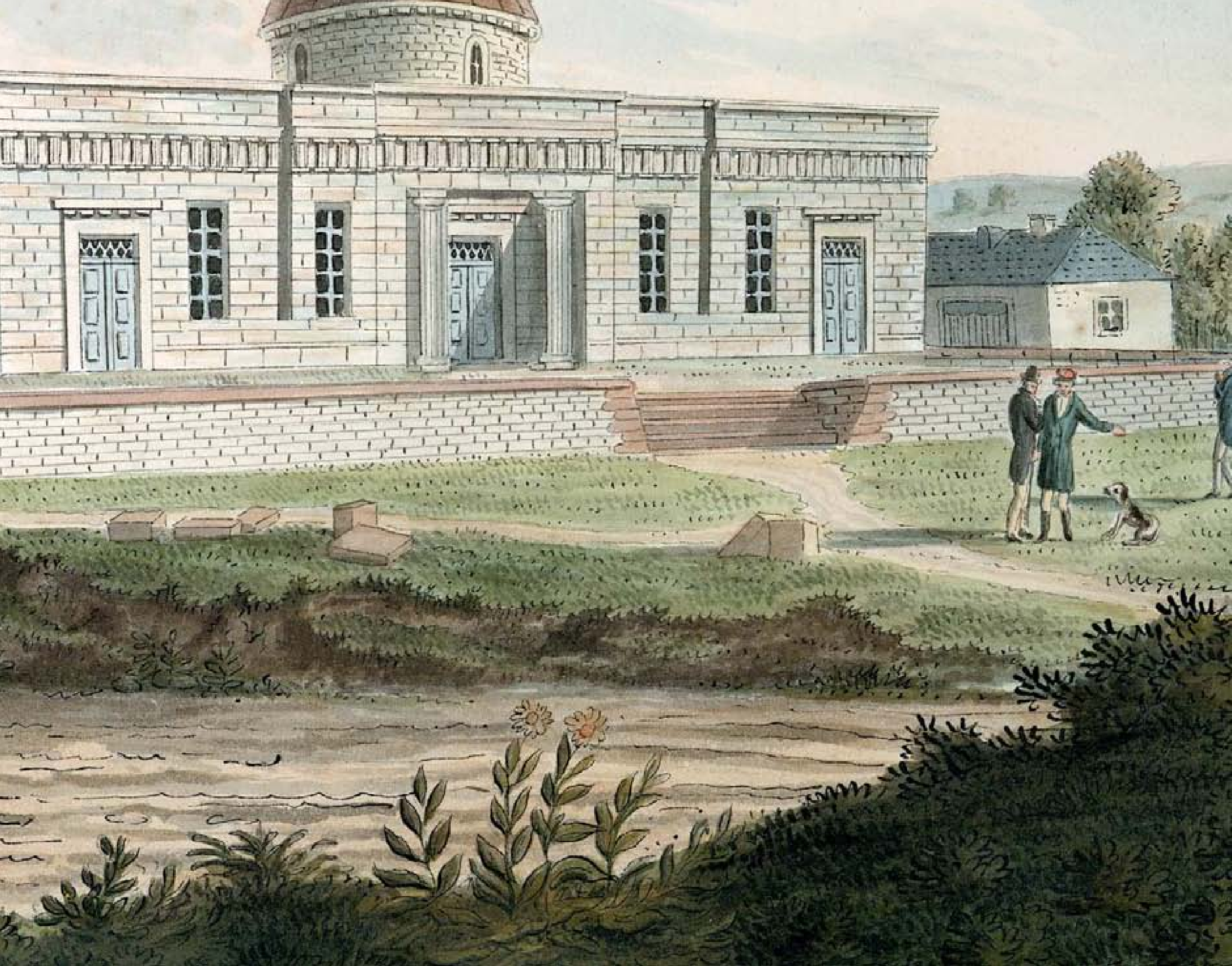


Abb. 1: Das im 2. Weltkrieg zerstörte Geburtshaus von Carl Friedrich Gauß in Braunschweig (Archiv der Gauß-Gesellschaft/Repro Verfasser)

rauf gar keinen Werth, ausser in so fern sie Mittel, nicht aber Zweck ist.« Gauß vertrat die Ansicht, dass Rechenkünstler wie Johann Martin Dase (die damals auf Jahrmärkten auftraten) von Mathematik nicht wirklich etwas verstünden, als »mechanische Hilfsrechner« aber wohl brauchbar seien. Aufgrund seiner besonderen Leistungen in der gymnasialen Oberstufe wurde Gauß im Alter von 14 Jahren dem Braunschweiger Welfenherzog Carl Wilhelm Ferdinand vorgestellt und erhielt von diesem ein Stipendium, das ihm den Kauf von Lehrbüchern und später auch ein Studium an der Universität Göttingen ermöglichte: Ein solches Studium hätte Gauß' Vater weder bezahlen können noch bezahlen wollen. Denn nach Gebhard Gauß' Ansicht hätte Carl Friedrich einen »anständigen« Lehrberuf ergreifen sollen.

Schon als Schüler in Braunschweig beschäftigte sich Gauß intensiv mit Mathematik, unter anderem der Häufigkeit und Verteilung der Primzahlen, der Berechnung von Kegelschnitten usw. Und dabei ist ein gewisser Kontakt zur Astronomie fast unausweichlich, denn wie könnte man sich beispielsweise ein sphärisches Dreieck besser veranschaulichen, als durch das berühmte Sommerdreieck der Sterne Wega, Deneb und Atair (Abb. 2)? Und wie könnte man sich die Eigenschaften einer Ellipse schöner veranschaulichen als durch die harmonische Bewegung der Planeten in konfokalen (stets die Sonne im Brennpunkt habenden) Ellipsenbahnen? Schon im Alter von 14 Jahren besaß Gauß ein Astronomiebuch von Abraham Gotthelf Kästner, und er versah dieses mit schon sehr sachkundigen, manchmal auch bissigen Anmerkungen, nicht ahnend, dass eben dieser Kästner später sein akademischer Lehrer in Göttingen sein würde. Überhaupt war es eine Eigenart von Gauß, seine Bücher mit handschriftlichen Notizen und Anmerkungen zu verzieren (was ihren Wert kurzfristig gemindert, nachträglich aber erhöht hat). Wir können also festhalten, dass Gauß sich ab 1791 mit Astronomie beschäftigte, zunächst jedoch nur theoretisch, also ohne eigene Beobachtungen. Denn ein Fernrohr gab es in seinem Elternhaus nicht.

In Göttingen hatte die Geschichte der Astronomie als Lehrfach im Jahre 1748 mit einem Besuch des (astronomiebegeisterten) Königs Georg II. und der Beobachtung und Berechnung einer partiellen Sonnenfinsternis begonnen. Bald darauf, nach einer – vernünftigerweise bald wieder aufgegebenen – Suche nach einem Platz für ein Observatorium in der Innenstadt – erfolgte der Bau der ersten Göttinger Sternwarte auf dem »Turm zur Windmühle«, einem inzwischen nicht mehr vorhandenen Turm der südlichen Stadtmauer in der heutigen Turmstraße: Die Gestirne beobachtet man nämlich »am schicklichsten im Mittag«, das heißt im Süden, und nicht durch den Dunst der Stadt. An dieser Sternwarte, die bereits durch den Astronomen Tobias Mayer (1723 – 1762) unsterblichen Ruhm erlangt hatte, betrachtete Gauß als Student Carl Felix von Seyffers im Wintersemester 1795/96 erstmals den Himmel durch ein Teleskop. Gauß' damals schon ziemlich alter Professor für Mathematik und Physik, Abraham Gotthelf Kästner (der schon Lehrer Lichtenbergs gewesen war), war immerhin von 1767 bis 1789 auch Direktor der Göttinger Sternwarte und trug – sei es durch sein vorgenanntes Buch oder durch die Praxis – sicherlich auch dazu bei, das Interesse für Astronomie in Gauß zu fördern. Jedenfalls entlieh sich der Student Gauß nachweislich zahlreiche Bücher über Astronomie aus der Universitätsbibliothek. Nachgewiesen ist auch, dass Gauß die Lichtenbergsche Ausgabe der Werke seines berühmten Vorgängers Tobias Mayer (erschienen 1775) besaß und las, denn er hat darin unter anderem handschriftlich einen von Mayer im Jahre 1756 im Sternbild Fische beobachteten Stern als den (erst 1781 von William Herschel entdeckten) Planeten Uranus markiert. (Abb. 3)

Als Gauß 1798 im Alter von 22 Jahren nach Braunschweig zurückkehrte, galt er zumindest in privaten Kreisen bereits als kompetenter Privatlehrer für Astronomie. So waren die Weichen gestellt, und Gauß bildete sich in den folgenden Jahren als Autodidakt in Braunschweig zum theoretischen Astronomen aus. Im Jahre 1799 promovierte er bei Johann Friedrich Pfaff in Helmstedt mit einer so herausragenden mathematischen Arbeit, dass ihm die mündliche Prüfung (allerdings auf seinen eigenen Antrag hin) erlassen werden konnte. Seine zahlentheoretischen Arbeiten fasste Gauß in den 1801 erschienenen »Disquisitiones Arithmeticae« zusammen, einem fundamentalen Werk, das jedoch nur wenige der begabtesten Mathematiker überhaupt verstehen konnten und durch das Gauß deshalb nicht gerade Weltbekanntheit erlangte.

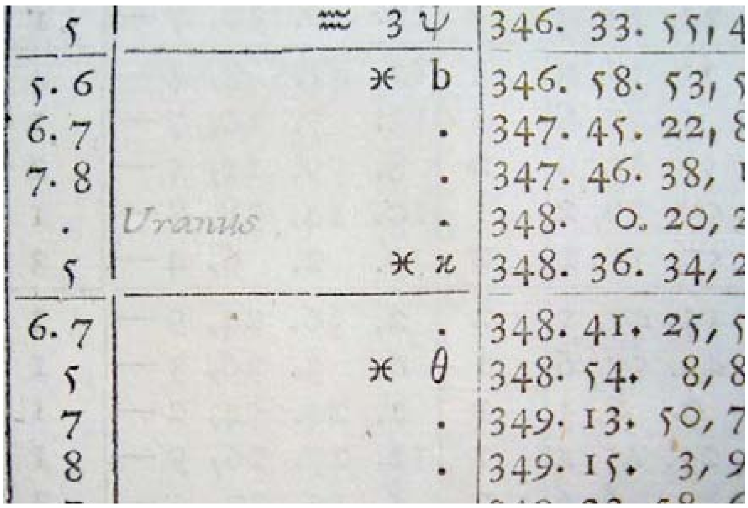
Nach seiner Promotion war Gauß Privatgelehrter in Braunschweig, wohnte nicht mehr bei den Eltern und erhielt eine regelmäßige Bezahlung von Herzog Carl Wilhelm Ferdinand. Um Gauß in Braunschweig zu halten, plante der Herzog sogar den Bau einer Sternwarte für ihn. Zu deren Realisierung kam es infolge des Kriegstodes des Herzogs im Jahre 1806 jedoch nicht mehr, und Gauß, der seit 1805 verheiratet war und eine Familie zu ernähren hatte, verlor dadurch auch sein regelmäßiges Einkommen.

Abb. 2: Das aus den hellen Sternen Wega (oben rechts), Deneb (oben links) und Atair (unten) gebildete »Sommerdreieck« (Foto: © Andy Steere/USA, 26. Juni 1996, mit freundlicher Genehmigung A. Steere 2008)

Gauß' Wandel zum praktischen Astronomen

Seine erste und eigentliche Ausbildung in beobachtender Astronomie (die unter anderem wegen des meist schlechten Wetters eiserne Nerven und der Kälte wegen stählerne Gesundheit verlangt) erhielt Gauß im Herbst 1803 durch den Herzoglich-Gothaer Astronomen Franz Xaver von Zach, dessen Zeitschrift: »Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde« (kurz: »M.C«.) die erste Fachzeitschrift war, die Gauß regelmäßig las. Am 28. August 1803 traf sich Gauß mit Zach auf dem Brocken und begleitete ihn danach zur herzoglichen Sternwarte auf den Seeberg bei Gotha, wo er sich in praktischer Astronomie ausbilden ließ. Gauß' erste astronomische Publikation – eine theoretische Arbeit – war schon drei Jahre zuvor in der M.C. erschienen. Dabei handelte es sich um einen mathematischen Algorithmus (ein Formelsystem) zur Berechnung des Datums des Osterfestes für alle Zeiten. Zur Festlegung des Osterfestes wird nämlich nicht der tatsächliche Lauf des Mondes (der dafür viel zu kompliziert ist) verwendet, sondern man benutzt Näherungsvorschriften, die der Astronom Christoph Clavius um 1580 für die römisch-katholische Kirche ausgearbeitet hat. Gauß gelang es, anstelle der von Papst Gregor XIII. mit Erlass vom 1. März 1582 verkündeten verbal-tabellarischen Vorschriften einen handlichen numerischen Algorithmus zu entwickeln, der seitdem als »Gaußsche Osterformel« bekannt ist.

Während sich Gauß noch mit der sehr schwierigen Theorie der Bahnberechnung des Mondes herumschlug, geschah am Abend des 1. Januar 1801 ein Ereignis, das Gauß' Hinwendung zur Astronomie für immer besiegelte: Nachdem man im Altertum Jahrtausende hindurch am Himmel nur die fünf großen Planeten Merkur bis Saturn gekannt hatte, war 1781 der Planet Uranus entdeckt wor-



5	♒ 3 ψ	346. 33. 55, 4
5. 6	♓ b	346. 58. 53,
6. 7	.	347. 45. 22,
7. 8	.	347. 46. 38,
.	Uranus .	348. 0. 20,
5	♓ κ	348. 36. 34,
6. 7	.	348. 41. 25,
5	♓ θ	348. 54. 8,
7	.	349. 13. 50,
8	.	349. 15. 3,

Abb. 3: Handschriftliche Anmerkung »Uranus« von Gauß in seinem persönlichen Exemplar von Tobias Mayers Sternkatalog, herausgegeben von Georg Christoph Lichtenberg 1775 (Universität Göttingen/Handschriftenabteilung der SUB Göttingen)

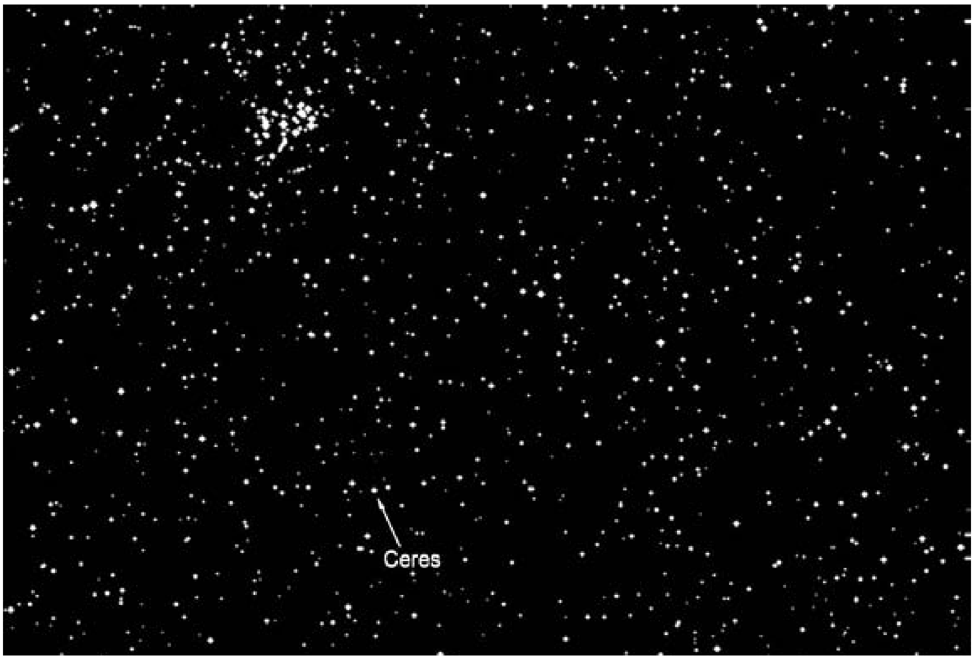
den, und man stellte fest, dass die Abstände dieser sechs Planeten plus der Erde von der Sonne – ermittelt aus ihren Umlaufzeiten mithilfe des dritten Keplerschen Gesetzes – mit einer gewissen Regelmäßigkeit zunahmen und dabei einer »Titius-Bode-Gesetz« genannten Formel folgten. Aber zwischen Mars und Jupiter klaffte eine auffällige Lücke: Dort gehörte ein noch unbekannter Planet hin!

»*Wie man sieht, so muss man zwischen Mars und Jupiter einen imaginären Planeten setzen.*«, so Lichtenberg in seiner Vorlesung. Jeder wollte diesen natürlich entdecken, bot sich hier doch eine Möglichkeit, auch ohne akademische Ausbildung zu Weltruhm zu gelangen. Am Abend des 1. Januar 1801 fand der italienische Astronom Giuseppe Piazzi im Sternbild Stier ein kleines Sternchen 8. Größe, das an den folgenden Abenden seine Position veränderte, und zwar in einer Weise, die eine Bahn in der vermuteten Entfernung von der Sonne (2,8 AE) nahelegte (Abb. 4). Wie man verstehen kann, posaunte Piazzi seine Entdeckung nicht gleich in die Welt hinaus, um sich nicht mit fehlerhaften Beobachtungen oder falschen Schlussfolgerungen zu blamieren. Er beobachtete bis zum 11. Februar weiter, erkrankte dann aber heftig. Außerdem wurde das Wetter schlecht, und das Piazzische Gestirn wanderte im Laufe der Monate näher zur Sonne. So ging der neue Planet wieder verloren.

Nicht jedoch in Gauß' Kopf! Piazzi hatte nämlich seine Daten an vertrauenswürdige Astronomen gesandt, und mit dem Septemberheft der M.C. erreichten diese auch Carl Friedrich Gauß. Dieser erfand eine besondere Methode, die Bahn des Planeten trotz der sehr wenigen Beobachtungen mit hoher Genauigkeit zu berechnen, und sagte dessen Position in einer Tabelle, die sich bis zum 31. Dezember 1801 erstreckte, voraus – und zwar um etwa 10 Grad weiter östlich als alle anderen Berechnungen seiner berühmten Kollegen Piazzi, Olbers, Lalande und Burckhardt! Gauß behielt recht, denn in der Nacht zum 8. Dezember 1801 gelang es Zach, die Ceres aufgrund der Gaußschen Vorhersage – und nur aufgrund dieser – im Sternbild Jungfrau wiederzuentdecken. Bald danach, am 1. Januar 1802 (dem Jahrestag der Entdeckung), fand auch Olbers in Bremen die Ceres wieder, und man war sich einig, dass dies einzig und allein durch Gauß' Berechnungen möglich geworden war. Dadurch wurde Gauß im Alter von nur 24 Jahren schlagartig weltberühmt, denn die Nachricht von dem neuen Planeten verbreitete sich in Windeseile in allen Gazetten der Welt. Seit dem 27. September 2007 ist die Raumsonde »DAWN« der NASA zur Vesta und zur Ceres unterwegs, und man darf auf deren Nahaufnahmen im August 2011 (Vesta) beziehungsweise Februar 2015 (Ceres) gespannt sein.

Ab Januar 1802 korrespondierte Gauß regelmäßig mit seinem Freund und Förderer Wilhelm Olbers. Dieser war praktischer Arzt in Bremen und gleichzeitig einer der bedeutendsten Amateurastronomen aller Zeiten; er besaß zudem einen ausgeprägten Sinn für zukunftsträchtige Entwicklungen und wirkte im Hintergrund dezent auch als Wissenschaftsmanager auf seine Freunde ein. Am bekanntesten ist Olbers heute durch das so genannte »Olberssche Paradoxon« in der Kosmologie, seine aber wohl bedeutendste astronomische Entdeckung bzw. Förderleistung war die des Talents von Carl Friedrich Gauß (und seine zweitbedeutendste die des Talents von Friedrich Wilhelm Bessel), denn man hat es ganz wesentlich ihm zu verdanken, dass Gauß fünf Jahre später – statt einem Ruf nach St. Petersburg zu folgen – auf die Direktorenstelle der »neuen«, in den Jahren 1803 bis 1816 errichteten Göttinger Sternwarte berufen wurde. Am 1. September 1804 entdeckte Karl-Ludwig Harding in Lilienthal den dritten Kleinplaneten (»Juno«) und erhielt daraufhin 1805 einen Ruf nach Göttingen: Harding, der 1803 bereits die Ausrichtung und den Meridian für die neue Göttinger Sternwarte festgelegt hatte, wurde also noch vor Gauß an die Göttinger Sternwarte berufen, jedoch nicht als ihr Direktor (den suchte man noch), sondern als Extraordinarius. Har-

Abb. 4: »Entdeckungsfoto« der Ceres: Anblick des Sternhimmels am Abend des 1. Januar 1801 mit markierter Position der Ceres etwas unterhalb des Sternhaufens der Plejaden (Computersimulation Verfasser)



ding wurde auch durch den 1822 publizierten Sternkatalog »Atlas Novus Coelestis« bekannt.

Gauß als Astronom in Göttingen

Durch Patent vom 25. Juli 1807 wurde Gauß an die Universität Göttingen berufen und ihm *»die ordentliche Professur der Astronomie beygelegt«*. Nach dem Wortlaut des Patents sollte Gauß *»mit seinem Freunde, dem Professor philosophiae extraordinarius Harding«* die *»Direction über die dasige Sternwarte gemeinschaftlich«* übernehmen. Das entsprach allerdings nicht dem Wesen von Gauß, und in der Realität war stets Gauß der alleinige Direktor der Sternwarte. Die anfänglich recht enge Freundschaft mit Harding litt im Laufe der Jahre unter mancher Umständlichkeit des letzteren und vielleicht auch unter der psychischen Belastung, die der frühe Tod seines nach Harding benannten Sohnes Ludwig für Gauß bedeutete. Allerdings musste Gauß mit seiner Familie zunächst noch innerhalb der Stadtmauern wohnen – längere Zeit davon in der heutigen Kurzen Straße 15 –, denn aufgrund der französischen Besetzung, unter der Göttingen seit 1806 zum Königreich Westphalen Jérôme Bonapartes gehörte, konnte die Sternwarte nicht termingerecht fertiggestellt werden. Erst im Spätherbst 1816 konnte Gauß einziehen. Damit begann eine Zeit intensiver astronomischer Arbeiten, durch die die Göttinger Sternwarte (als Institution, nicht als Gebäude) zum zweiten Mal – nach der Zeit unter Tobias Mayer – Weltgeltung erlangte, und auf die in allen Einzelheiten hier aus Platzgründen nicht eingegangen werden kann

In seiner zu Beginn des Sommersemesters 1808 gehaltenen Antrittsvorlesung erläuterte Gauß seinen Zuhörern, dass sich die Astronomie in erster Linie darauf beziehe, die Gesetze der Bahnbewegung der Himmelskörper sowie deren Erscheinungen und deren Ursachen zu erforschen. Dabei könne nur gelten, was man aufgrund zuverlässiger, bestätigter Beobachtungen und aufgrund des *»strengen Calcüls«* wisse, nicht, was man glaube, träume oder aufgrund von aus der Luft gegriffenen Hypothesen vermute: *»Das **Meinen** in der Astronomie hört erst da auf, und das eigentliche Wissen fängt bei den Gegenständen an, die einer mathematischen Behandlung fähig sind.«* Obwohl Gauß sehr ungern Vorlesungen hielt (sie nahmen ihm, insbesondere im Falle unbegabter Zuhörer, zu viel seiner Zeit), war er als akademischer Lehrer außergewöhnlich erfolgreich: Zahlreiche seiner Schüler wurden später Direktoren anderer Sternwarten (und sein Schüler Wilhelm Klinkerfues schließlich sogar sein Nachfolger für praktische Astronomie an der Göttinger Sternwarte).

In den Jahren nach seinem Dienstantritt stellte Gauß – *»Dr. Gauss, der die Bahn keines am Himmel erscheinenden Fremdlings unbeachtet lässt«*, so Zach – allerlei Beobachtungen an, so etwa der beiden berühmten Kometen von 1811. Im Jahre 1809 veröffentlichte Gauß seine noch weitgehend in Braunschweig entstandene Untersuchung über die Bahnbewegung der Himmelskörper: *Theoria Motus Corporum Coelestium in sectionibus conicis solem ambientium* (Theorie der Bewegung der Himmelskörper, welche in Kegelschnittbahnen die Sonne umlaufen). Diese ist Gauß' astronomisches Hauptwerk und zählt noch heute zu den unentbehrlichen Grundlagen einer anständigen Ausbildung für Astronomen. Gauß' wichtigste Aufgabe nach seinem Amtsantritt war aber die Ausstattung der neuen Sternwarte mit modernen Instrumenten, insbesondere zwei Meridiankreisen im Ost- und Westsaal (Abb. 6), denn aus der alten Sternwarte hatte man lediglich einige sehr veraltete Instrumente übernehmen können. Die damalige Astronomie war eine reine Positionsastronomie: So etwas wie Astrophysik gab es – mangels Spektroskopie und Fotografie, geschweige denn Computer und Raumsonden – zu Gauß' Zeiten natürlich noch nicht (Gauß programmierend an einem heutigen PC wäre eine geradezu atemberaubende Vorstellung). Die genauesten Berechnungen der Bahnen der neu entdeckten Kleinplaneten und Kometen, aber auch der Bewegung von Sternen und des Sonnensystems (Apexbewegung) gelangen damals Gauß, und seiner Autorität – nicht nur als Astronom, sondern auch als Mathematiker, Geodät und Physiker – war die Berühmtheit der Göttinger Sternwarte als der »ersten Deutschlands« zu verdanken.

Abb. 5: Nach Gauß: Studierende in der Kuppel der Historischen Sternwarte.Die Kuppel wurde 1887 errichtet, das abgebildete Teleskop Anfang des 20. Jahrhunderts darin aufgestellt. Foto: Marc-Oliver Schulz

Sehr viel (vielleicht zu viel) Zeit verwendete Gauß aber auch auf die Beobachtung des Polarsterns und einiger anderer Standardsterne sowie der Sonne, um aus deren gemessener Winkelhöhe über dem Horizont die geographische Breite der Sternwarte mit einer

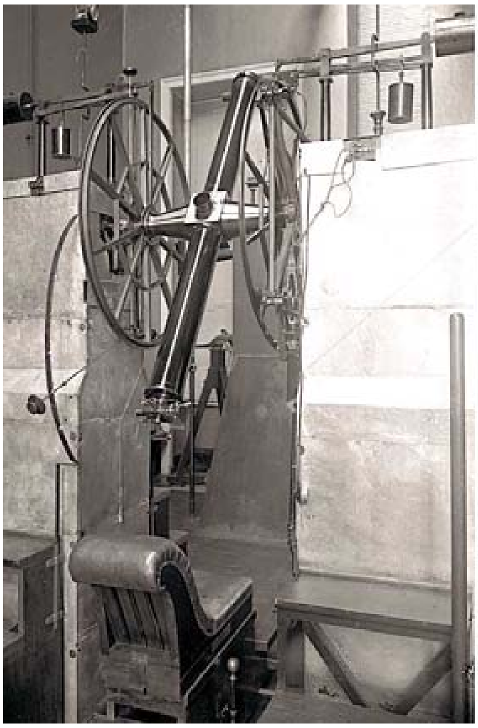


Abb. 6: Meridiankreise der Göttinger Sternwarte Links: Reichenbachkreis im Westsaal. Rechts: Repsoldkreis im Ostsaal (Sammlung Sternwarte/ Repro Verfasser)

Abb. 7: Gaußsches Heliotrop 2. Bauart, Exemplar der Sammlung Sternwarte (Institut für Astrophysik/ Foto: Verfasser)

Genauigkeit von Bruchteilen von Bogensekunden zu bestimmen. Dabei hatte er immer wieder mit optisch-mechanischen Fehlern, wie etwa der Durchbiegung oder der Erwärmung seiner Fernrohre, zu kämpfen, und er wusste noch nicht, dass es die (von seinem Vorbild Leonhard Euler 1755 vorhergesagten, 1844 von Friedrich Wilhelm Bessel andeutungsweise beobachteten und 1888 von Karl Friedrich Küstner erstmals nachgewiesenen) *»Polhöhenschwankungen«* tatsächlich gibt und dass diese seine gemessenen Breitenwerte beeinflussten.

Gauß' Schaffensperiode als Geodät und Physiker

In den Jahren ab 1820 beschäftigte sich Gauß ganz überwiegend mit der ihm mit Order vom 9. Mai 1820 durch König Georg IV. aufgetragenen Triangulation des Königreichs Hannover. Dabei wird das Land mit genauestens ausgemessenen Dreiecken überzogen, deren Ausgleichung Gauß nach der Methode der kleinsten Quadrate (hier sind mathematische Potenzen, nicht etwa »kleine Rechtecke« als Gegensatz zu »Dreiecken« gemeint) vornahm. Als Hilfs- und Messinstrument der Geodäsie erfand und entwickelte Gauß in den Jahren 1818 – 1820 den so genannten Heliotrop (Abb. 7), ein Instrument, das Sonnenlicht in eine ganz genau bestimmte Richtung zu spiegeln gestattet. Zur Ausrichtung seines Dreiecksnetzes, aber auch des Reichenbachschen Meridiankreises, benötigte Gauß eine genau nord-südlich verlaufende Strecke durch den Meridian der Sternwarte: Zu diesem Zweck wurde 1821 auf dem Steinkopf im Friedländer Holz, zwölf Kilometer südlich der Sternwarte, das *»Südliche Meridianzeichen«* errichtet, ein kleines Bauwerk aus Sandstein, auf dessen Schlitze die Fäden des Meridiankreises zentriert und so dessen Justierung geprüft werden konnten. Die Länge des mittleren Meridiangrades (die ein Maß für die Größe der Erde darstellt, die wiederum als Maßeinheit im Planetensystem dient) ermittelte Gauß aus Sternhöhen-Messungen, die er 1827 zusammen mit Johann David Nehus sowohl in Altona bei Hamburg als auch in Göttingen durchführte. Die Gaußschen Dreiecksmessungen – bei denen ihn Artillerieoffiziere aus Hannover (darunter sein ältester Sohn Joseph) unterstützten – wurden später noch bis 1847 fortgesetzt und führten unter anderem zu Präzisionslandkarten des Landes Hannover von Göttingen bis zur Nordseeküste. Ein weiteres wichtiges Ergebnis war die damit verbundene Einführung der *»Gauß-Krüger-Koordinaten«* in das amtliche Landkartenwesen. Und durch seine mathematische Behandlung der Geometrie auf gekrümmten Flächen – speziell auf dem Erdellipsoid und dem Geoid (welches Gauß' Schüler Listing so benannte) – legte Gauß auch gleich die Grundlagen der Differentialgeometrie und der höheren Geodäsie, wie sie heute zum Beispiel bei GPS-Koordinaten tagtäglich Anwendung finden.

In den Jahren 1824 bis 1844, in die unter anderem auch die Epoche seiner erdmagnetischen Messungen mit Wilhelm Weber und die Erfindung des weltweit ersten elektromagnetischen Telegraphen (1833) fällt, hat Gauß nur wenige astronomische Beobachtungen ausgeführt. Er beobachtete aber den Merkurdurchgang vom 5. Mai 1832, die Wiederkehr des Halleyschen Kometen 1835 (für den er –

möglicherweise sogar als Erster – die Existenz eines »festen Kerns« postulierte), die Sonnenfinsternisse von 1836 und 1839 sowie 1843 das Zodiakallicht und einen langschweifigen Kometen, der am 27. Februar 1843 in nur etwa 130.000 km Abstand an der Oberfläche der Sonne vorbeischrammte. Das Jahresbudget der Sternwarte (inklusive des Magnetischen Observatoriums) betrug zu jener Zeit nur 150 Reichstaler, was ungefähr dem Dreifachen der Jahresmiete einer Göttinger Studentenbude oder dem Gegenwert von 464 Litern guten Weines im Faß (den Gauß meist über Hamburg zu importieren pflegte; auch bei der Feldarbeit hatte er einen »Weinkeller« dabei) entsprach.

Gauß' letztes Lebensjahrzehnt

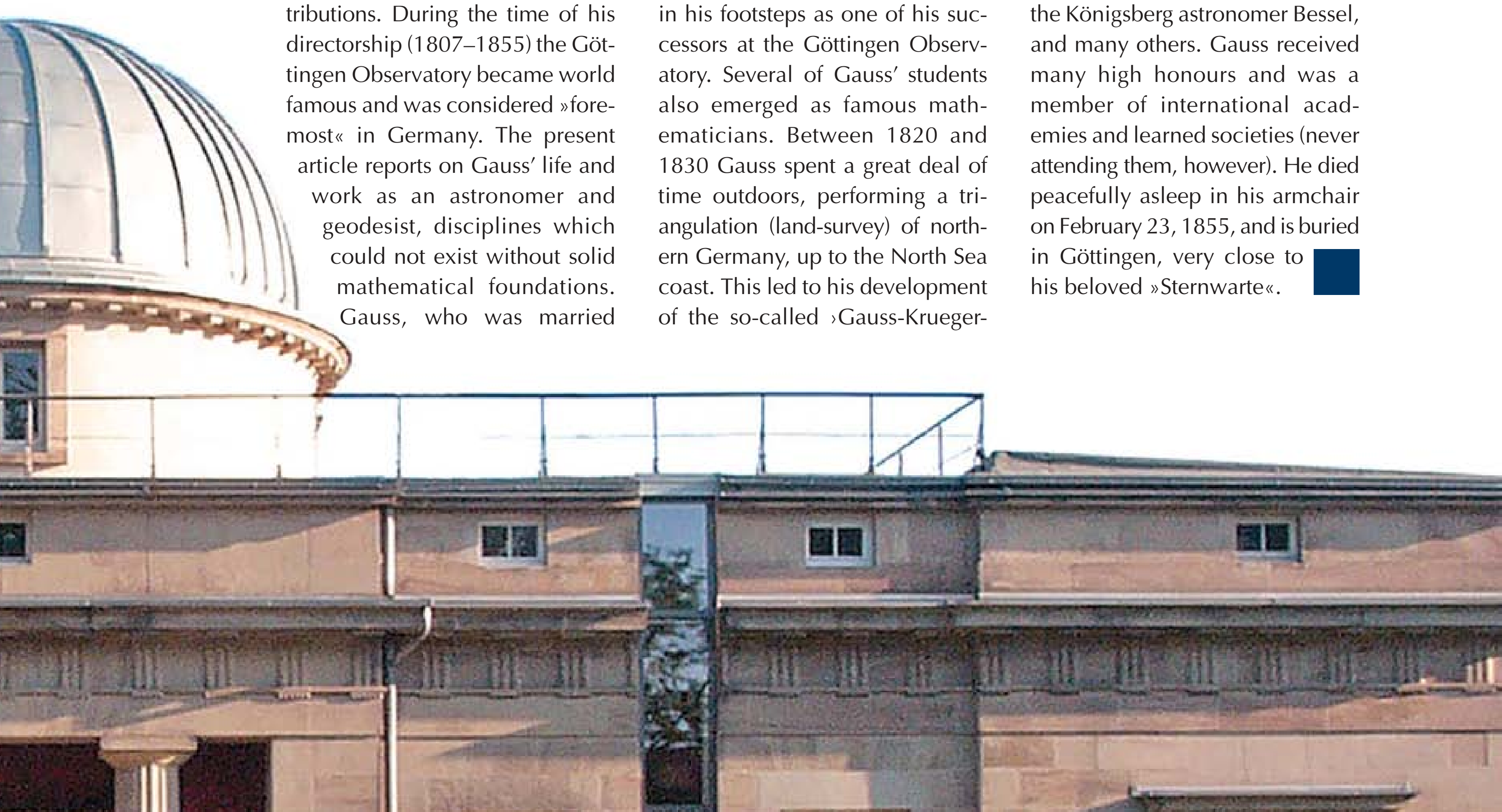
Ab etwa 1844 beschäftigte sich Gauß wieder stärker mit Astronomie. Unter anderem verfolgte er bissig kommentierend die Namensdiskussion um den 1846 von Johann Gottfried Galle, Assistent seines Schülers Encke in Berlin, entdeckten neuen Großplaneten »Leverrier« bzw. »Neptun« und beobachtete diesen vom 27. September 1846 an als einer der ersten Astronomen weltweit auch selbst (schon Galilei hatte Neptun beobachtet, ihn aber für einen Stern gehalten). Unter anderem schrieb Gauß: *»Das Bedürfniss, dass nicht so viele Namen gebraucht werden, als Astronomen sind, wird von Selbst eine Verständigung mit der Zeit herbeiführen«*. So war es dann auch. Die letzten von Gauß selbst noch ausgeführten astronomischen Beobachtungen beziehen sich auf die Kleinplaneten Iris, Flora, Parthenope und Victoria während der Jahre 1847 bis 1850 sowie auf die berühmte – im Baltikum totale – Sonnenfinsternis vom 28. Juli 1851. Gauß' intensive astronomische Schaffensperioden fallen vor allem in die Jahre 1801 – 1823 und 1844 – 1851. In Gauß' akademischer Lehrtätigkeit – wie im Übrigen auch in seiner Antrittsvorlesung und in seinen Briefen an Freunde und Kollegen – spielten astronomische Themen die ganz überwiegende Rolle, gefolgt von Landesvermessung, Mathematik, Technik, Physik, Persönlichem und gelegentlich auch etwas Wissenschafts-, Finanz- und Hochschulpolitik.

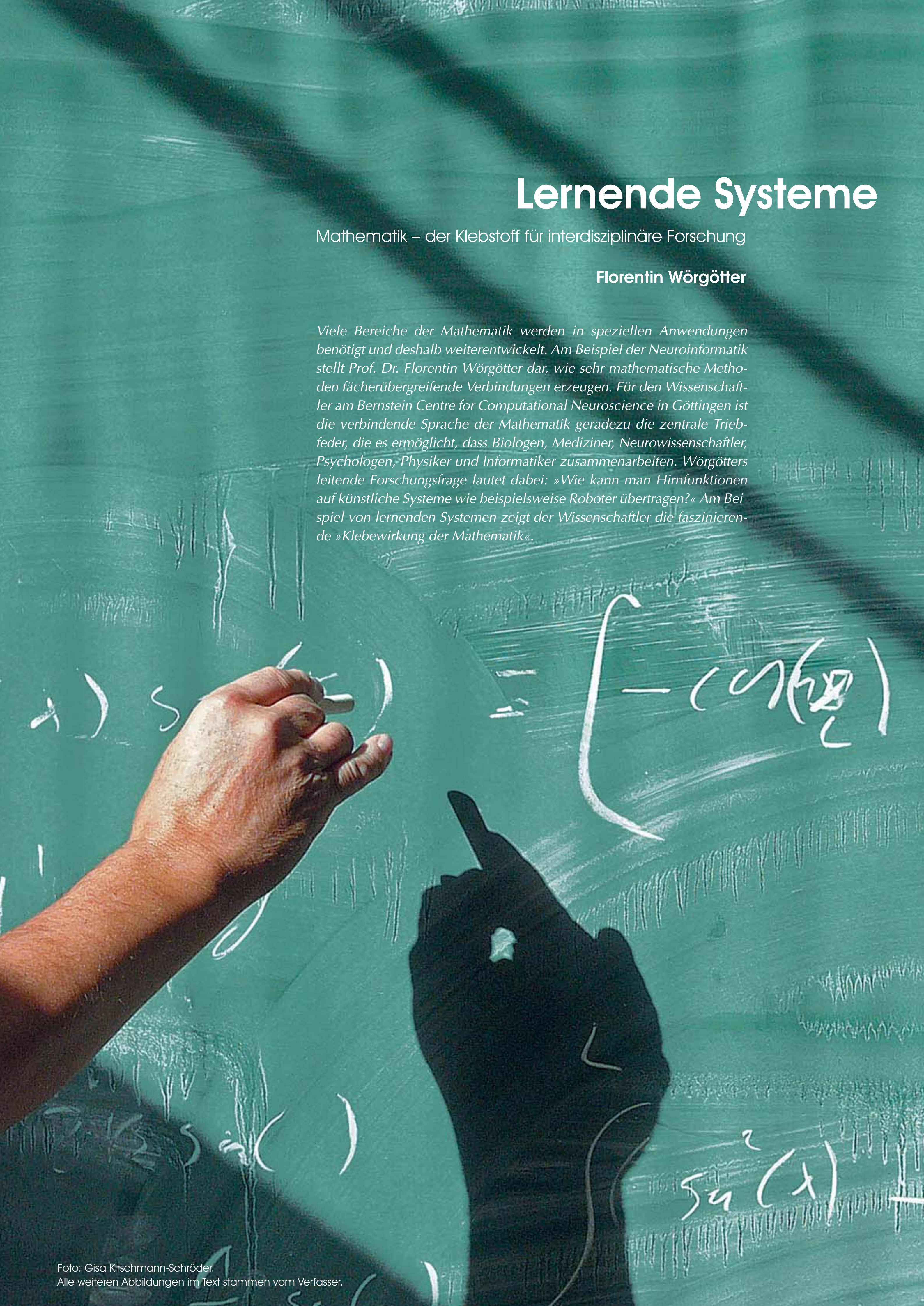
Am 23. Februar 1855, eine Stunde und zwei Minuten nach Mitternacht (registriert von Freund Listing), verstarb Carl Friedrich Gauß friedlich in seinem Lehnstuhl in der Sternwarte und wurde am 26. Februar auf dem Albanifriedhof in Göttingen beigesetzt (Abb. 8). »Er beschloss sein Leben, um zu den Welten überzugehen, die er so lange eifrig beobachtet hatte«, wie es in einer Würdigung im Braunschweigischen Magazin hieß.

Abb. 8: Grab von Carl Friedrich Gauß (»Erb-Begrebniss« der Familie Gauß) auf dem Albanifriedhof in Göttingen (Foto: Verfasser)

Dr. Axel D. Wittmann, Jahrgang 1943, legte 1963 in Braunschweig das Abitur ab. Danach studierte er Physik und Astronomie an der Universität Göttingen und wurde 1973 über ein sonnenspektroskopisches Thema promoviert. Von 1973 bis 2008 war er wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachgebiet Sonnenphysik an der Universitäts-Sternwarte Göttingen (seit dem Umzug 2005 im Institut für Astrophysik). Seit August 2008 ist Dr. Wittmann im Ruhestand und als freier Mitarbeiter der Universität Göttingen weiterhin eng verbunden. Dr. Wittmann ist Mitglied mehrerer wissenschaftlicher Vereinigungen, darunter der Astronomischen Gesellschaft (AG), der International Astronomical Union (IAU) sowie der Gauß-Gesellschaft e.V. Göttingen. Seit Oktober 2001 ist Dr. Wittmann Geschäftsführer der Gauß-Gesellschaft. Seine Arbeitsgebiete sind Sonnenphysik und Spektroskopie, Numerische Astrophysik, Himmelsmechanik, Reduktion von Beobachtungen, Computersteuerung von Teleskopen, Datenerfassung und digitale Bildverarbeitung. Ein besonderer Interessensschwerpunkt des Wissenschaftlers sind die Geschichte der Astronomie und Leben und Werk von Carl Friedrich Gauß.

Carl Friedrich Gauss, born in Brunswick on April 30, 1777, was one of the most outstanding mathematicians and scientists of all time. His talents became evident when he was a child attending primary school, where an older friend, Martin Bartels, gave him support in learning mathematics. When at high school (again together with Bartels, and assisted by his teacher Zimmermann), Gauss was granted a scholarship by Duke Carl Wilhelm Ferdinand. As a student in Göttingen (1795–1798) and a post-doc at Brunswick (1799–1806) Gauss' interest in astronomy steadily grew. Although somewhat shortsighted, he not only became eminent as a theoretical astronomer, but also as a practical one. In 1807, a few years after his spectacular mathematical re-discovery of the ›lost‹ minor planet Ceres, Gauss was appointed Professor of Astronomy and Director of the Göttingen University Observatory, where he lived and worked until his death in 1855. At Göttingen Gauss' main fields of research were astronomy, mathematics, geodesy, and physics, in each of which he made outstanding contributions. During the time of his directorship (1807–1855) the Göttingen Observatory became world famous and was considered »foremost« in Germany. The present article reports on Gauss' life and work as an astronomer and geodesist, disciplines which could not exist without solid mathematical foundations. Gauss, who was married twice, had to endure severe pain in his private life, losing both of his spouses and two of his children at an early age, and seeing two of his sons emigrate to America. In 1809 Gauss published his main astronomical monograph, »*Theoria motus …*« (Theory of motion of celestial bodies orbiting the Sun in conic sections), in which he described a novel method of orbital calculations in the solar system involving his method of least-squares and ingeniously-designed iterative techniques. One of Gauss' main tasks upon taking up his position in Göttingen was to equip the Observatory with modern instruments, in particular meridian circles, repetition circles, and a heliometer. Much of Gauss' work dealt with positional observations of the sun, moon, planets, comets and stars (astrophysics not being in existence at the time, since photography and spectroscopy had not yet been invented). Gauss drew no great satisfaction from lecturing, but he was nevertheless successful even with this: many of his former students later became directors of observatories themselves, and Wilhelm Klinkerfues, his former assistant, even followed in his footsteps as one of his successors at the Göttingen Observatory. Several of Gauss' students also emerged as famous mathematicians. Between 1820 and 1830 Gauss spent a great deal of time outdoors, performing a triangulation (land-survey) of northern Germany, up to the North Sea coast. This led to his development of the so-called ›Gauss-Krueger-Coordinates‹ (equivalent to the UTM coordinates used today) and to his contributions to geodesy, curved surfaces, and non-Euclidean geometry. When combined with latitude measurements, such a survey can play a part in the determination of the earth's dimensions and, thus, of the cosmic distance scale. Between 1830 and 1840 Gauss, together with Wilhelm Weber, investigated magnetism, electricity, and the earth's magnetic field. This research also led to the construction of the first electromagnetic telegraph (1833), but more or less ended when Weber (one of the ›Göttingen Seven‹) was relieved of his duties for an interval of about ten years. Among other things, Gauss observed a transit of Mercury (1832), Halley's comet (1835), the solar eclipses of 1836 and 1839, the sun-grazer comet of 1843, and the newly-discovered planet Neptune. He published his observations in the journal *Astronomische Nachrichten* which had been founded by one of his pupils and friends, Heinrich Christian Schumacher. Gauss travelled little, but regularly corresponded with the Bremen astronomer Olbers, the Gotha astronomer von Zach, the Königsberg astronomer Bessel, and many others. Gauss received many high honours and was a member of international academies and learned societies (never attending them, however). He died peacefully asleep in his armchair on February 23, 1855, and is buried in Göttingen, very close to his beloved »Sternwarte«.





Lernende Systeme

Mathematik – der Klebstoff für interdisziplinäre Forschung

Florentin Wörgötter

Viele Bereiche der Mathematik werden in speziellen Anwendungen benötigt und deshalb weiterentwickelt. Am Beispiel der Neuroinformatik stellt Prof. Dr. Florentin Wörgötter dar, wie sehr mathematische Methoden fächerübergreifende Verbindungen erzeugen. Für den Wissenschaftler am Bernstein Centre for Computational Neuroscience in Göttingen ist die verbindende Sprache der Mathematik geradezu die zentrale Triebfeder, die es ermöglicht, dass Biologen, Mediziner, Neurowissenschaftler, Psychologen, Physiker und Informatiker zusammenarbeiten. Wörgötters leitende Forschungsfrage lautet dabei: »Wie kann man Hirnfunktionen auf künstliche Systeme wie beispielsweise Roboter übertragen?« Am Beispiel von lernenden Systemen zeigt der Wissenschaftler die faszinierende »Klebewirkung der Mathematik«.

Foto: Gisa Kirschmann-Schröder.
Alle weiteren Abbildungen im Text stammen vom Verfasser.

Alle höheren und selbst viele der einfachen Lebewesen lernen. Das Lernen dient der Anpassung an eine sich verändernde Umwelt und erhöht die Überlebenschancen des Individuums. Lernen kann prinzipiell auf drei Arten erfolgen: Erstens durch Versuch und Irrtum, zweitens durch Belohnung und Bestrafung und drittens durch explizite Anweisungen, beispielsweise von einem Lehrer. Menschen benutzen alle drei Lernformen, einfache Tiere nur die erste und komplexere Tiere – Säugetiere und Vögel – die ersten beiden. Es ist interessant, dass auch wir Menschen als Kleinkinder zunächst meistens die ersten beiden Verfahren nutzen – jeder weiß, wie kleine Kinder wieder und wieder versuchen, durch Versuch und Irrtum einfache geometrische Formen durch zufälliges Drehen ineinanderzustecken. Erst mit fortgeschrittenem Alter können wir durch Belohnung (zum Beispiel Lob) lernen oder sogar gezielt den Anweisungen eines Lehrers folgen.

Welche Veränderungen treten beim Lernen im Gehirn auf? Wie werden Lerninhalte gespeichert? Wie können wir Gelerntes wieder abrufen? Warum vergessen wir oft mühsam Gelerntes, wohingegen manch anderes sich in unser Gedächtnis geradezu »eingegraben« hat, sodass wir uns ein Leben lang daran erinnern. Und: Was hat das Ganze mit Mathematik zu tun?

Historisch kann man dies nachvollziehen, da etwa 30 bis 45 Jahre nach dem Bekanntwerden der ersten quantitativen Experimente, die sich mit dem Thema Lernen befassten (zum Beispiel Pawlovs berühmter Hund, englischsprachige Erstpublikation 1927), die ersten mathematischen Modelle dazu entworfen wurden (Richard Bellman 1957, dynamische Programmierung, Robert A. Rescorla und Allan A. Wagner 1972 mit dem Rescorla-Wagner-Modell, psychologische Modellierung). Davon ausgehend hat sich bis heute eine weit verzweigte mathematische Theorie zum Thema adaptive, also lernende, Systeme entwickelt. Bevor wir dazu kommen, ist es jedoch interessant, zunächst einmal zu verstehen, was sich im Gehirn beim Lernen verändert.

Lernen – Verschaltungen im Hirn

Es kann als gesichert angesehen werden, dass Lernen die Verbindungsstellen zwischen Nervenzellen, den Synapsen, modifiziert. Im Jahr 1949, lange vor den ersten physiologischen Befunden dazu, hat der kanadische Psychologe Donald Hebb (1904 – 1985) dies als den zentralen Lernmechanismus vorgeschlagen. Seine komplexe wissenschaftliche Aussage wurde später prägnant in dem Satz zusammengefasst: *»What fires together, wires together«*. Sie bedeutet, dass Nervenzellen, die gleichzeitig aktiv sind, die sie verbindenden Synapsen verstärken. Diese »Hebbsche Lernregel« lässt sich mathematisch schreiben als: $\omega(t+\Delta t) \leftarrow \omega(t) + \mu\, x(t)\, v(t)$, wobei $x(t)$ die Aktivität des Eingangsneurons und $v(t)$ die des Ausgangsneurons ist. Dabei sind die Neuronen durch die Synapse ω miteinander verbunden. Das heißt, die Veränderung der Synapse ω nach einem Zeitschritt Δt folgt der Korrelation zwischen Eingangs- und Ausgangssignal. Der Faktor μ heißt Lernrate und ist normalerweise eine kleine positive Zahl, da jedes Lernereignis die Synapse nur ein wenig verändern soll. Immerhin möchte niemand, dass jedes Sinnesereignis das Gedächtnis sofort verändert. Lernen braucht Zeit und Wiederholung (kleine Lernrate), ansonsten würde man allzu oft zufällige, also bedeutungslose, Korrelationen erlernen. Der erste zur Hebbschen Lernregel passende physiologische Befund wurde 1973 von Tim Bliss und Terje Lomo erhoben. Die Wissenschaftler konnten an einem speziellen Neuronentyp zeigen, dass sich bei korrelierter Eingangs-Ausgangsaktivität tatsächlich die Synapsenstärke erhöht. Dieser als Langzeitpotenzierung (LTP) bekannte Effekt wurde in der Folgezeit an fast allen bekannten Neuronentypen nachgewiesen.

Man kann davon ausgehen, dass sich alle, selbst die komplexesten Lernvorgänge im Gehirn, auf die eine oder andere Weise auf die Hebbsche Lernregel zurückführen lassen, denn selbst nach nunmehr 40 Jahren Forschung ist es nicht gelungen, einen anderen ebenso fundamentalen physiologischen Lernmechanismus zu entdecken. Hebbsches Lernen – also die Verstärkung von Synapsen durch Eingangs-Ausgangskorrelation, oft jedoch stark biophysikalisch modifiziert – scheint in der Tat die ›Mutter aller Lernregeln‹ im Gehirn zu sein.

Viele mathematische Lernverfahren benutzen die Hebbsche Regel auf recht direkte Weise; zum Beispiel ist es damit möglich, Ähnlichkeiten – also Korrelationen – innerhalb großer Datensätze zu finden und grafisch als Landkarte darzustellen. Diese so genannten »Kohonen-Karten« oder »Kohonen-Netze« sind nach ihrem Entdecker, dem finnischen Wissenschaftler Teuvo Kohonen benannt. Sie finden mittlerweile vielfältige Anwendung im Bereich des Data-Minings.

Lernen durch Korrelationen ist jedoch ein sehr, sehr langsamer Prozess. Beim eingangs beschriebenen Kinderspiel, bei dem geometrische Objekte durch die passende Öffnung gesteckt werden müssen, gibt es sehr viele falsche und oft nur eine richtige Orientierung. Nimmt man noch dazu, dass jede Bewegung (Drehung), immer etwas inakkurat ist, dann wird klar, wieso es für einen Zweijährigen so frustrierend ist, dies durch Versuch und Irrtum zu erlernen. Der Dreijährige, dem man sagt, »Gut, weiter so!« oder »Schlecht, mach's anders!« (Lernen durch Belohnung/Bestrafung), kommt schon schneller zum Ziel, und einem noch älteren Kind kann man explizit sagen: »Dreh das mal nach oben, dann passt es!« (Lernen durch explizite Anweisungen).

Unserem Gehirn ist es also offensichtlich gelungen – ausgehend von der Hebbschen Korrelationsregel – neue effizientere Lernregeln zu entwickeln; zum Beispiel das Lernen durch Belohnung/Bestrafung (Reinforcement Learning), welches man mathematisch schreiben kann als: $\omega(t+\Delta t) \leftarrow \omega(t) + \mu[r - (v(t-1) - v(t))]$. In aufeinanderfolgenden Lernschritten wird durch diese Lernregel versucht, immer besser vorherzusagen, wie groß der zu einem Zeitpunkt zu erwartende Reward *r* sein wird, wobei r also ein numerischer Belohnungsterm ist. Die Differenz $v(t-1) - v(t)$ ist dabei die Vorhersage, wie gut die zu erwartende Belohnung zwischen zwei Zeitschritten geschätzt wurde. Sobald diese Vorhersage gleich r ist, ist die Schätzung optimal, und das Lernen hört auf. Das generelle Ziel eines jeden Reinforcement Learning Algorithmus ist es, die gesamte (durch Aktionen des Lernenden ›eingesammelte‹) Belohnung zu maximieren. Das heißt, Reinforcement Learning ist zielgerichtet. Dies ist ein zentraler Unterschied zum Hebbschen Lernen, welches lediglich von Korrelationen in den Daten getrieben wird. (vgl. Abb. 1)

Der Schätzfehler wurde mit δ abgekürzt, wobei $\delta = r + v(t) - v(t-1)$ ist, und man wird noch sehen, warum δ eine so hohe Bedeutung hat. Die Konvergenz des Verfahrens beruht darauf, dass, wenn die Schätzung zwischen zwei beliebigen Schritten korrekt ist, sie dann auch im Grenzfall überall korrekt ist. Die Theorie des Reinforcement Learnings hat sich, unabhängig von den bestehenden psychologischen Befunden, aus dem Bereich der dynamischen Programmierung – vereinfacht sind das Computerprogramme, die sich selbst anpassen können – hauptsächlich in den 1980er Jahren entwickelt und ist jetzt eine

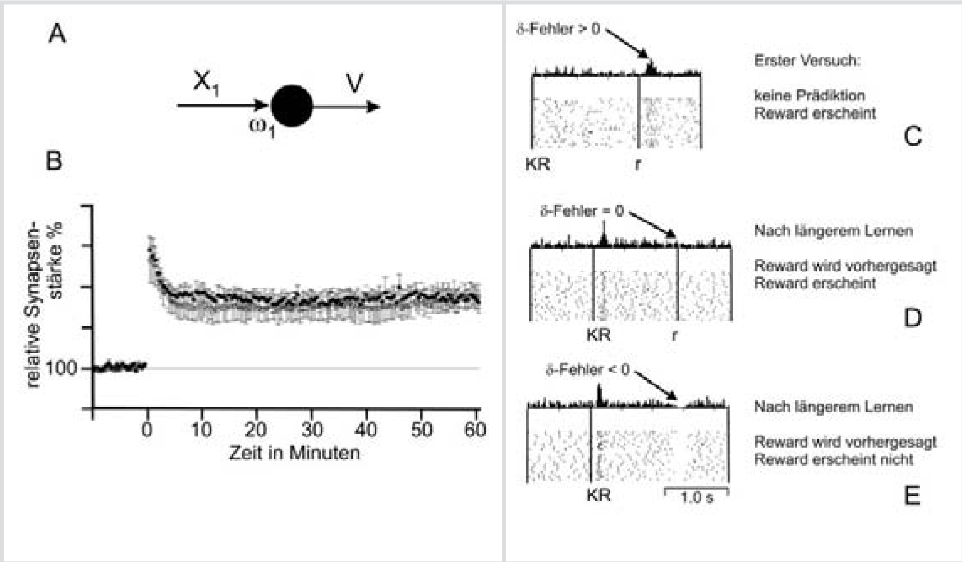


Abb. 1: Hebbsches Lernen (A,B) und Lernen durch Belohnung (Reinforcement Learning, C-E). In (A) sieht man ein Neuron (schwarz), welches Eingangssignal X_1 erhält und Ausgangssignal V erzeugt. Das Eingangssignal wird über die Synapse ω_1 an das Neuron geleitet. Wenn man Eingang X_1 zum Zeitpunkt Null in (B) lang anhaltend stimuliert, dann erhält man eine Verstärkung der Synapse ω_1. Hier ist das Ausgangssignal des Neurons intrazellulär gemessen worden und man sieht, dass es größer ist (Langzeitpotenzierung). Dieses Neuron befand sich im Hippocampus, einer phylogenetisch sehr alten Hirnstruktur, die mit Lernen und Gedächtnis in Verbindung gebracht wird. Der rechte Teil der Abbildung zeigt ein Experiment, bei dem ein Neuron aus den Basalganglien (*Substantia Nigra*) registriert worden ist. Das Versuchstier lernte nach und nach die Assoziation eines konditionierenden Reizes (KR) mit einer Belohnung *r* (reward). Das Neuron reproduziert mit seiner Aktivität das Verhalten des Schätzfehlers δ, wie im Text beschrieben. Fehler kleiner als Null werden neuronal nicht mehr direkt abgebildet, da Neurone keine negative Aktivität erzeugen können. Von daher ist das Fehlersignal in (E) bei Null abgeschnitten.

komplexe und eigenständige mathematische Disziplin. Zentrale Konvergenzbeweise wurden mittlerweile erarbeitet und die komplexe, veränderliche Dynamik solcher Systeme wird zunehmend besser verstanden. Insgesamt war jedoch das Reinforcement Learning lange Zeit eine Domäne des »Machine Learning« und wurde bestenfalls durch psychologische Experimente motiviert.

In den frühen 1990er Jahre traten jedoch mehr und mehr Befunde zu Tage, die zeigten, dass Neurone in den Basalganglien[1], einer Hirnstruktur, die für motorische Planung und Exekution zuständig ist, in der Tat anscheinend Aspekte dieses Lernverfahrens mehr oder weniger direkt repräsentieren. Spezielle Zellen, die in der Substantia Nigra als Überträgerstoff das Dopamin verwenden, sind dabei offensichtlich in der Lage, den Schätzfehler δ durch ihre Aktivität darzustellen[1]. Andere Zellen in einem anderen Teil der Basalganglien, dem Striatum, drücken die Erwartung einer Belohnung (genauer Belohnungsstärke) durch ihre Aktivität aus. Man kann nun ganz generell feststellen, dass es nur durch die Entwicklung der mathematischen Theorie des Reinforcement Learning überhaupt möglich war, diese neuronalen Antworten überhaupt zu verstehen.

Eine zentrale Frage, die uns an dieser Stelle bewegt, ist jedoch: Wenn sich letztendlich im Gehirn alles Lernen auf die Hebbsche Regel zurückführen lassen muss, wie kann man dies für die oben hingeschriebene Reinforcement Lernregel erreichen? Dabei muss man auch noch sicher stellen, dass man nur mit mathematischen Operationen arbeitet, die durch Neurone auch tatsächlich durchgeführt werden können. Hier gibt es viele Probleme, angefangen damit, dass Reinforcement Learning aufgrund seiner Abstammung vom »Machine

1 Bekannt sind diese Zellen besonders durch ihre Bedeutung bei der Parkinsonschen Krankheit, wo dieser Zelltyp abstirbt.

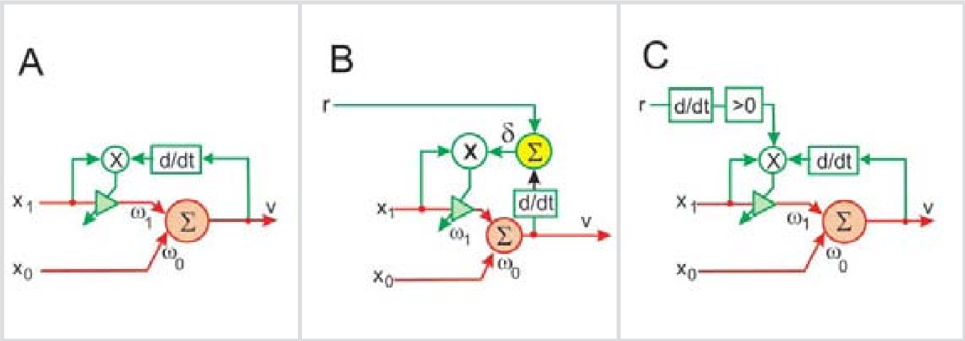


Abb. 2: Lernregeln für zwei Eingangssignale X_0 und X_1 schematisch dargestellt. Die runden roten Symbole mit dem Summationszeichen stellen die lernfähigen Neurone dar. Sie summieren ihre Eingänge nach der Formel: $v=\omega_0 X_0 + \omega_1 X_1$, wobei $\omega_{0,1}$ die synaptischen Gewichte sind. In rot sieht man also den neuronalen Schaltkreis, der das Ausgangssignal v liefert. Mit diesem Signal könnte zum Beispiel eine Verhaltensreaktion erzeugt werden. In grün sieht man den »Lernschaltkreis«, dieser beeinflusst die Synapse ω_1. Das Verstärkersymbol (Dreieck) stellt die veränderliche Synapse $\omega 1$ dar, die anfänglich gleich Null ist. Die Synapse ω_0 verändert sich nicht. Ihr Ausgang dient als Referenzsignal, wenn am Anfang des Lernens ω_1 noch Null ist. Das X im grünen Kreis symbolisiert eine Multiplikation, d/dt eine Ableitung nach der Zeit. A) Hebbsches Lernen mit zwei Eingängen. B) Lernen durch Belohnung (Reinforcement Learning). Hier braucht man noch ein weiteres Neuron (gelb), welches den δ Fehler (siehe Text) berechnet. Das Symbol r bezeichnet das Belohnungssignal (reward). C) Drei-Faktor Hebbsches Lernen. Mit dieser Umformulierung ist es möglich, Reinforcement Learning ohne Zusatzneuron allein durch Hebbsches Lernen nachzubilden. Die mathematische Theorie des Drei-Faktor Lernens wurde maßgeblich in Göttingen entwickelt.

Learning« ursprünglich als raum- und zeitdiskrete Mathematik formuliert worden war. Weiterhin tritt als Problem auf, dass Reinforcement Learning ein Belohnungssignal braucht, also einen weiteren (dritten) Faktor, der zunächst einmal in der Hebbschen Regel nicht vorkommt. Und dann gibt es da noch den fundamentalen Konflikt, dass Reinforcement Learning zielgerichtet ist, Hebbsches Lernen jedoch nicht.

Es ist in den letzten zwei Jahren durch die Arbeit vieler Theoretiker – auch durch unsere – gelungen, diese Gegensätze auszuräumen und die beiden Lernregeln miteinander zu einem Drei-Faktor-Modell zu vereinen, welches ein wichtiger Schritt im Wechselspiel zwischen mathematischer Lerntheorie und neurophysiologischer Funktion war. Mit der Umformulierung der Hebbschen Regel in das Drei-Faktor Hebbsches Lernen ist es möglich, Reinforcement Learning ohne Zusatzneuron allein durch Hebbsches Lernen nachzubilden. Die mathematische Theorie des Drei-Faktor-Lernens wurde maßgeblich in Göttingen entwickelt. (vgl. Abb. 2)

Es ist nicht möglich, in der Kürze dieses Artikels auch noch auf das Lernen durch explizite Anweisungen (›supervised learning‹) einzugehen, auch haben wir etliche andere Lernaspekte gar nicht erst erwähnt, wie zum Beispiel Lernen durch Vormachen (›imitation learning‹) oder das Lernen rein motorischer Fähigkeiten (zum Beispiel beim Skifahren). Diese Aspekte werden im Gehirn vermutlich durch noch andere komplexe Lernregeln und Neuronentypen[2] verwirklicht, wobei sich auch hier die Frage stellt: Wie kann man die komplexen Theorien der Selbstorganisation neuronaler Systeme weiterentwickeln, besser verstehen und für andere Systeme (zum Beispiel Roboter) nutzbar machen?

RunBot

Am Bernstein Center in Göttingen befassen wir uns insbesondere mit der Frage, wie man zweibeinige Roboter dazu bringen kann, so gehen zu lernen wie der Mensch geht. Durch die Medien sind uns in der Regel jene großen Maschinen bekannt, zum Beispiel der von der Firma Honda entwickelte humanoide Roboter ASIMO, die durchaus schnell gehen und sogar joggen können. Jedoch sieht das Bewegungsmuster unnatürlich aus, da diese Maschinen immer versuchen, ihren Körperschwerpunkt über der Fußfläche zu halten. Jeder Moment der Bewegung wird

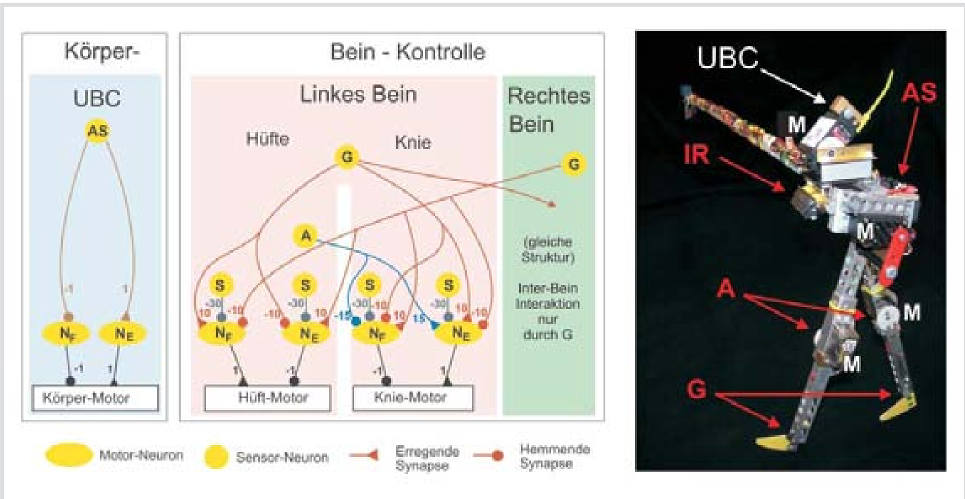
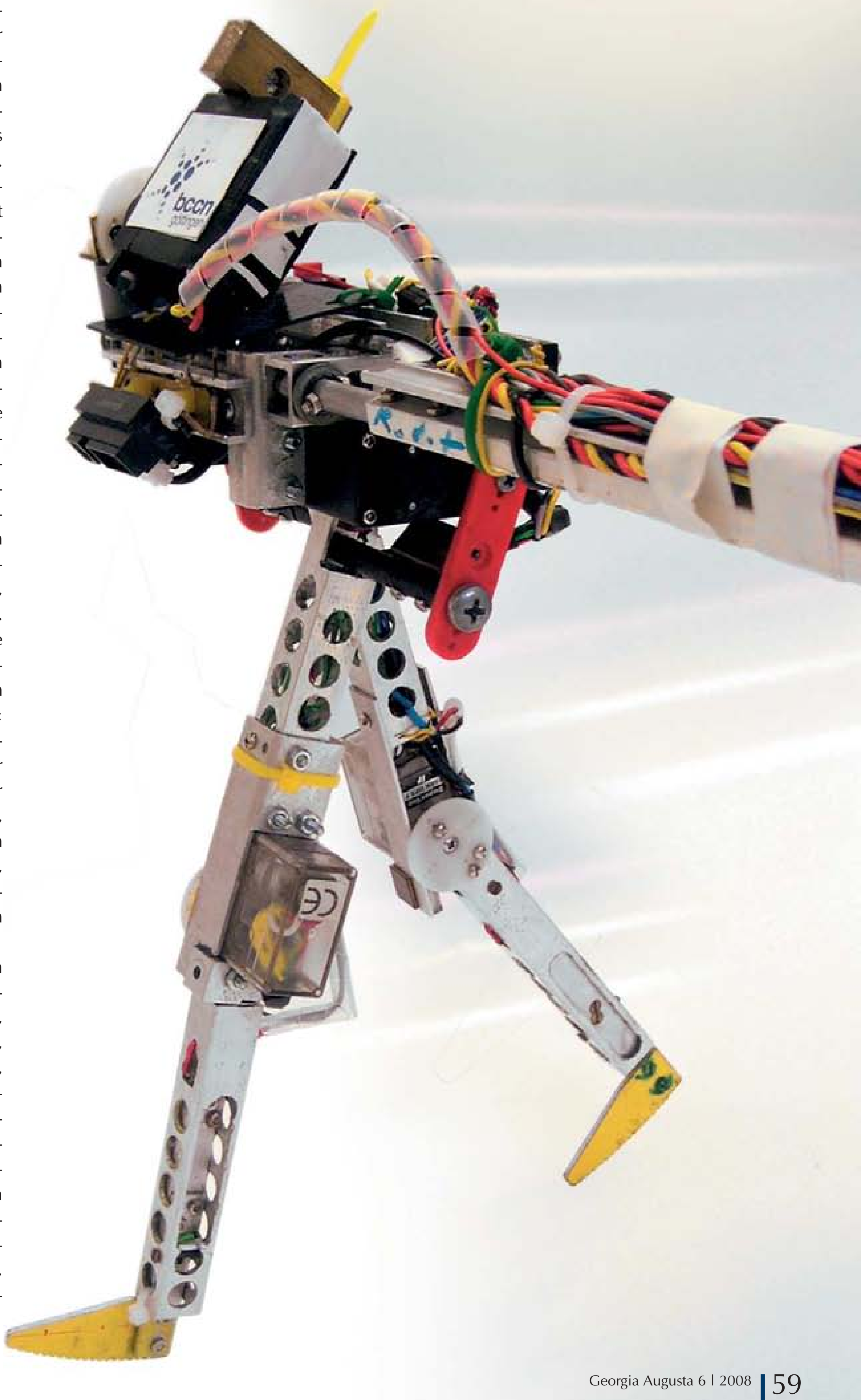


Abb. 3: Steuernetzwerk (Links) von RunBot (rechts). An der Maschine sind in rot die verschiedenen Sensoren markiert (G= Fußkontakt, A=Hüftstreckung, AS=Beschleunigungssensor, IRR=Infrarotsensor), in weiß die Motoren (M=Motoren von Hüfte, oben, nur einer ist sichtbar; und Knie, unten; sowie UBC=Motor des kleinen Oberkörperelements). Die Sensoren S messen die Kniestellung und sind nicht eingezeichnet. Das Netzwerk benutzt diese Sensoren zur Erzeugung der Motorsignale N. Die kleinen Zahlen geben die numerische Verbindungsstärke an den jeweiligen Synapsen an. Diese Verbindungen werden durch Hebbsches Lernen verändert, wenn RunBot lernen soll, eine Rampe hinaufzulaufen.

2 Es ist hier vielleicht interessant auf die berühmt gewordenen ›Mirror-Neurons‹ hinzuweisen. Es gibt im Gehirn von Affen und Menschen (genauer in der kortikalen Region F5) Neurone, die auf das Vormachen bestimmter Handlungen und Gesten reagieren. Man vermutet deshalb, dass diese Neurone fundamental am Imitationslernen beteiligt sind, welches auch ein wichtiger Lernmechanismus in der frühen Kindheit von Affen und Menschen (Primaten) ist.

dabei von Rechnern kontrolliert. Menschen gehen anders, nämlich schwingend! Hier wird der Körperschwerpunkt wie bei einem dynamischen, umgekehrten Pendel immer vor und zurück bewegt. Nur behinderte oder sehr alte Menschen gehen so wie ASIMO. Auch steuern wir unsere Gehbewegungen nicht immer und ständig. Das wäre energetisch sehr ungünstig. Stattdessen setzt unser Nervensystem nur punktuell ein und der Rest des Bewegungszyklus läuft automatisch (unkontrolliert) ab. Die in Göttingen durchgeführten Studien mit einem kleinen Roboter namens RunBot zeigen, dass schnelles menschenähnliches Gehen durch neuronale Netzwerkkontrolle möglich ist. Diese Netze können genau wie unser Nervensystem punktuelle Kontrolle ausüben, und dies besser als herkömmliche Regelkreise. Sie können auch mithilfe der Hebbschen Regel lernen. Dadurch ist es möglich, dass RunBot erlernen kann, auch flache Rampen zu ersteigen. Das hat dazu geführt, dass die Süddeutsche Zeitung in einem Artikel vom 24. Juli 2007 mit dem Titel »Im Stechschritt zu Berge« RunBot zum ersten bergsteigenden Roboter kürte. Dies greift der tatsächlichen Entwicklung zwar vor, jedoch zeigen diese Arbeiten, dass dynamisches Gehen durch neuronale Kontrolle möglich ist, und dass solche Maschinen ihr Verhalten durch Lernen verbessern können, genau wie der Mensch.

In diesen Forschungsarbeiten werden also verschiedenste Bereiche der Physik (Biomechanik, Theorie dynamischer Systeme), Neurobiologie (neuronale Netze, synaptische Plastizität) und der Informatik (komplexe Informationsverarbeitung in vernetzten Systemen) zusammengefügt. Die dahinterstehenden mathematischen Gleichungssysteme sind und bleiben dabei der Klebstoff, der es ermöglicht, dass diese vielfältige, interdisziplinäre Arbeit erfolgreich vorankommt.



All animals, even the simplest ones, can learn. Learning makes them fitter and guarantees better chances for survival. We distinguish three kinds of learning: unsupervised learning (trial and error learning), reinforcement learning (learning from reward and punishment), and supervised learning (learning with the help of a teacher who provides an error signal as feedback to the learner). Neuroscientists all over the world have shown how such learning rules are reflected in the activity of neurons. Learning deficits are being investigated in Psychology and treated by Medicine. In addition, these mechanisms have massively entered technical systems (internet search engines, machines, industrial robots) to make them more flexible and robust.

There is one strongly binding commonality that facilitates interactions between these different fields. It is the mathematical formalisms by which the different learning rules can be described that allow scientists in these fields »to talk to each other«. Thus, over the last 50 years several mathematical theories have emerged that capture these different types of learning.

From the brain sciences it is known that all more complex learning rules must find their basis in the modification of the connections between neurons – the synapses. In Biophysics, this happens by means of a correlation between input and output signals at a given neuron's synapse. When in- and outputs are correlated the synapse will get stronger. Fundamentally this is an unsupervised learning mechanism that relies only on the temporal structure of in- and output signals. The question then arises: How has our brain managed to derive more complex learning rules from such a simple correlation-based mechanism? Somehow, complex learning mechanisms must be grounded on the biophysics of neural networks, their neurons and their synapses. But how?

Through the work of many scientists, also in Göttingen, it has now become possible to provide mathematical links between the different formalisms for learning, and we have succeeded in showing, for example, that reinforcement learning can be formulated by pure correlations between signals. In this way the complex reinforcement learning rule finds its basis in the biophysics of neurons and networks. These steps are important for our understanding of brain function, but they are also of interest for improved technical systems. As a consequence, many of those active in Neuroinformatics devote their efforts to the design of artificial systems (artificial neural network, machines, and robots). A key ingredient in these systems – just like in animals – is their ability to learn. Using mathematical theories similar to those that describe learning in our brain, we can also equip our technical systems with the ability to adapt and reconfigure. It has thus become possible to implement learning also in walking robots (for example Göttingen's RunBot) to become more flexible and adapt to changes in terrain. Hopefully this type of research will lead to improved prostheses for human patients who would greatly benefit from more flexible and adaptive walking aids. There is still a long way to go before this can be achieved, but a better mathematical understanding of learning and adaptation is an indispensable prerequisite to uniting the different fields for their work on »the learning problem«.

Prof. Dr. Florentin Wörgötter, Jahrgang 1960, studierte Biologie an der Universität Düsseldorf und promovierte 1988 am Universitätsklinikum Essen. Die Habilitation in den Neurowissenschaften folgte 1993 an der Ruhr-Universität Bochum, an der er am Institut für Physiologie tätig war. Forschungsaufenthalte führten den Wissenschaftler in die USA (1988 bis 1990), nach China (1994) und nach Schweden (1997). Im März 2000 wechselte er an das Department of Psychology der University of Stirling (Schottland). Dort wurde Prof. Wörgötter im Februar 2002 Direktor des Institute of Neuronal Computational Intelligence and Technology (INCITE) und 2003 Leiter einer entsprechenden Unternehmensgründung der Universitäten Stirling, Edinburgh und Paisley. In seinen Forschungsarbeiten auf dem Gebiet der Wahrnehmung und Bewegungskontrolle beschäftigt sich Wörgötter insbesondere mit visuellen Systemen sowie mit biophysikalischen Lernprozessen. Ziel dieser Forschung ist es unter anderem Maschinen (Roboter) mit adaptiven, d. h. lernfähigen neuronalen Netzen auszustatten, um damit autonomes Verhalten zu erzeugen. Zum 1. Juli 2005 nahm Prof. Wörgötter einen Ruf auf die neu eingerichtete Professur für Computational Neuroscience am Bernstein Centre for Computational Neuroscience in Göttingen an. In den Bernstein-Zentren arbeiten Wissenschaftler an der Erforschung der neuronalen Grundlagen von Hirnleistungen auf der Basis mathematischer Modelle. Sie verbinden dabei Experimente, Datenanalyse und Computersimulationen mit neuen theoretischen Konzepten.


HOCHSCHULEN UND WISSENSCHAFT
Vernetzte Forschung
Attraktiver Studienort
Internationaler Wissenstransfer
GÖTTINGEN
STADT, DIE WISSEN SCHAFFT
Bild: Georg Christoph Lichtenberg (1742-1799), Innenhof Historisches Gebäude SUB Göttingen

… und Gott würfelt doch – aber mit System

Mit Statistik den Zufall kontrollieren

Axel Munk

Statistik, aus dem lateinischen »status«, Zustand oder Lage, hat sich aus dem Bedürfnis entwickelt, das Verhalten großer komplexer Systeme zu verstehen und daraus Handlungsstrategien zu entwickeln, die es erlauben, diese Systeme vorherzusagen und steuernd einzugreifen. Solche Systeme setzen sich typischerweise aus vielen kleinen Akteuren zusammen, die jeder für sich genommen schwer zu beschreiben sind und scheinbar zufällig und unberechenbar agieren. Erst in ihrer Gesamtheit offenbaren sie verblüffende Gesetzmäßigkeiten. Deshalb spielt die Statistik beispielsweise bei Versicherungen, im Bankengewerbe oder bei der Prognose der Bevölkerungsentwicklung eine wichtige Rolle. Dass statistische Verfahren und mathematische Modellbildung auch bei Mustererkennung, Biometrie, Tomographie und einer neuen Generation von Mikroskopen einen entscheidenden Beitrag leisten, zeigt der folgende Beitrag. Dabei ist die Georg-August-Universität bereits historisch eng mit der Entwicklung der mathematischen Statistik und der Versicherungsmathematik verbunden. Am 1. Oktober 1895 wurde auf Initiative von Felix Klein (1849 – 1925) in Göttingen das erste deutsche Seminar für Versicherungswissenschaft gegründet, an dem man den Grad des »Versicherungsverständigen« erwerben konnte. Weitere Entwicklungen sind maßgeblich mit anderen Göttinger Namen verbunden, etwa mit Wilhelm Lexis (1837 – 1914) oder Felix Bernstein (1878 – 1956), dem Begründer des Instituts für Mathematische Stochastik.

Vier Bausteine für erfolgreiche Statistik

Auch wenn sich Verkehrsteilnehmer individuell unterschiedlich verhalten, so lassen sich ihre Unfallprognosen doch recht gut bestimmen: leider – oder glücklicherweise – nicht für den einzelnen, aber das ist für ein Versicherungsunternehmen auch nicht entscheidend. Um etwa die KFZ-Prämien festzulegen, ist es nur wichtig, die Gesamtheit »im Blick zu haben«. Um den ›Risikofaktoren‹ entsprechend Prämien festlegen zu können, spielen unter anderem das Geschlecht, das Alter des Fahrers und der Wagentyp eine wichtige Rolle. Dass Frauen schlechter einparken können als Männer, ist statistisch nicht erwiesen, dass sie aber weniger Verkehrsunfälle verursachen, ist unbestritten. Auch räumliche Strukturen (Landkreis oder Stadt) beeinflussen das Schadensrisiko. Versicherungsmathematiker versuchen, die wesentlichen Faktoren zu identifizieren und in einem statistischen Modell zu erfassen. Ihre Aufgabe besteht letztlich darin, ein System von Gleichungen zu finden, in das als Input möglichst viele aufgenommene Schadensfälle (Daten) sowie die Faktoren für einen ›typischen‹ Versicherungsnehmer eingehen. Als Output erhält man zum Beispiel die geschätzte Wahrscheinlichkeit, einen Schaden einer bestimmten Höhe zu verursachen. Diese Ergebnisse der Versicherungsmathematik bestimmen die Prämienkalkulation des Autoversicherers. Eine Versicherung oder auch eine Krankenkasse funktioniert nur, wenn sie viele ›Akteure‹ hat. Schwankungen durch den Einzelnen mitteln sich hier aus.

Am Beispiel der Autoversicherung kann man gut erkennen, welche Bausteine nötig sind, um den Zufall erfolgreich zu kontrollieren: Erstens eine gute Datenerhebung (Datenbestand eines Versicherungsunternehmens), zweitens ein ›einfaches‹, das heißt gut berechenbares, aber aussagekräftiges statistisches Modell (ein System von Gleichungen, welches nur die entscheidenden Faktoren berücksichtigt und die Eingabe ›zufälliger‹ Größen auf das Wesentliche reduziert), drittens die leistungsfähige (effiziente) Berechnung der Gleichungen und viertens die Möglichkeit zur Computersimulation (zum ›Ausprobieren‹ unzähliger zufälliger Szenarien).

Mustererkennung – Automaten brauchen Vorbilder

Diese vier Bausteine bilden das Grundgerüst moderner Statistik und lassen sich in unterschiedlichen Bereichen finden und verwenden. So arbeiten Verfahren der Mustererkennung nach demselben Prinzip: Wenn ein Kunde im Supermarkt seine Pfandflaschen in einen Automaten einwirft, so hat dieser Automat (genauer: die Rechenvorschriften, die sich hinter der Software des Automaten verbergen) schon viele am Computer generierte und echte Flaschen ›gesehen‹ und klassifiziert. Das statistische Modell wurde so trainiert, dass der Fehler einer falschen Klassifikation möglichst klein ist. Dabei geht es bei dieser Mustererkennung um die Gewährleistung von zwei Dingen: (1) der Supermarktbetreiber möchte keine falschen Flaschen untergeschoben bekommen und dafür Pfandgeld zahlen, und (2) der Kunde möchte für alle Pfandflaschen auch sein Geld zurück.

In das Modell – genauso wie zur Berechnung der Versicherungsprämie – gehen wichtige Vorinformationen ein, die mathematisch beschrieben werden müssen. Bei Flaschen ist dies nicht allzu kompliziert, ihre ›Muster‹ sind noch recht einfach, schwieriger wird es bei komplexen Mustern, wie sie beispielsweise in der Biometrie erkannt werden müssen. Bei der Iris-, Gesichts- oder Fingerabdruckerkennung haben wir es mit sehr komplexen Gegenständen zu tun, die jedoch bei genauerem Hinsehen spezifische Strukturen haben. Beispielsweise verlaufen Fingerabdrücke nicht beliebig sondern sie bestehen aus Linienscharen, die einige markante Verzweigungspunkte (Minutien) haben (Abb. 1), und diese Vorinformation spielt eine wesentliche Rolle bei der automatischen Klassifizierung. Diese Minutien ›automatisch‹ aus dem Bild eines Fingers zu extrahieren, ist eine sehr komplizierte Aufgabe, die geometrische, algorithmische und statistische Methoden erfordert (Abb 2). Der letzte Schritt (matching) ist dann, die Lage der Minutien zweier Fingerabdrücke zu vergleichen. Falls diese genügend deutlich übereinstimmen, gilt der Finger als korrekt identifiziert und der Person wird beispielsweise der Zugang zu einem Raum gewährt.

Um nun ein leistungsfähiges Erkennungssystem zu entwickeln, welches eine Person einem System anhand ihres digital aufgenommenen Fingerabdruckes zuordnet (etwa bei der Zugangsberechtigung zu einem Telefon oder Computer), müssen also genau diese vier Schritte vollzogen werden: Datenerhebung, mathematisch-statistische Modellbildung, effiziente Berechnung und Computersimulation.

Solche Systeme werden mittlerweile in verschiedenen Anwendungsbereichen eingesetzt, und sie sind nicht unumstritten. Dabei geht man davon aus, dass jeder Abdruck eine Person eindeutig bestimmt, das heißt es gibt keine zwei Menschen mit demselben Abdruck. Untersuchungen zeigen in der Tat, dass etwa auch bei eineiigen Zwillingen die Abdrücke unterschiedlich sind, wenn auch nur in geringem Maß. Unterschiede, die für das menschliche Auge oftmals leicht auszumachen sind, können jedoch in ihrer mathematischen Handhabung sehr schwierig sein. Andere Probleme entstehen durch die zeitliche Veränderung eines Abdruckes oder die Möglichkeit, Fingerabdrücke zu kopieren und das System so zu überlisten.

Die digitale Aufnahme eines Abdrucks ergibt niemals genau dasselbe Bild: Die Lichtverhältnisse verändern sich kontinuierlich und Finger sind permanent kleinen Verletzungen ausgesetzt. Diese Einflüsse im Detail zu messen oder bei der Berechnung im Einzelnen zu berücksichtigen, ist genauso hoffnungslos wie die morgendliche Gemütsverfassung eines Autofahrers auf dem Weg zur Arbeit, der zufällig im Stau gelandet ist, in eine Schadensprognose mit einzubeziehen. Solche Schwankungen lassen sich jedoch mit geeigneten statistischen Methoden herausfiltern. Erkennungssysteme machen Fehler; dies lässt sich nie völlig ausschließen, man kann nur versuchen, sie zu minimieren. Weitgehend unverstanden ist beispielsweise bisher, wie sich die Fingerabdrücke im Laufe eines Lebens verändern und wie sich dies auf Erkennungsfehler auswirken kann. Das ist momentan Forschungsgegenstand eines Göttinger Projektes in Kooperation mit dem Bundeskriminalamt (BKA) Wiesbaden.

Statistik als Querschnittswissenschaft

Statistik ist keine isolierte Disziplin, sondern eine Querschnittswissenschaft. Es ist ihre Stärke – und ihre Schwäche –, mittels mathematischer Techniken, insbesondere wahrscheinlichkeitstheoretischer Modellbildung, von dem konkreten Anwendungsfeld zu abstrahieren und so tiefer liegende zufallsbedingte Strukturen zu erkennen und nutzbar zu machen. Der Statistiker und Wahrscheinlichkeitstheoretiker Persi Diaconis, Mathematiker an der University of Stanford (USA), hat die Statistik als die »Physik der Zahlen« bezeichnet, und in der Tat ist die Vorgehensweise ähnlich: Auch Physiker versuchen komplexe Systeme durch einfachere Modelle zu beschreiben, gerade so einfach, dass die entscheidenden Eigenschaften noch sichtbar sind – und bedienen sich sehr oft statistischer Methoden. Theorien werden durch empirische Befunde überprüft und modifiziert, hieraus entstehen Modelle. Solche statistischen Modelle haben zum Teil eine erstaunliche Universalität: Die Gleichungen und Zufallsmechanismen, die Teilen der Computertomographie zugrunde liegen, ähneln stark denen, die bei der Fluoreszenzmikroskopie auftauchen, auch wenn physikalisch sehr verschiedene Prozesse dahinter stehen. In der Positronen-Emissionstomographie (PET) werden Photonen, die aus dem zufälligen Zerfallsprozess eines radioaktiven Präparates stammen, in Detektoren gezählt, die das Untersuchungsobjekt umgeben (vgl. dazu den Beitrag von Rainer Kreß für weitere Techniken der Tomographie). So kann etwa eine Aufnahme der Herzdurchblutung gewonnen werden, ohne dass invasiv eingegriffen werden muss. Dort, wo die Durchblutung stärker ist, fließt mehr radioaktives Material hindurch, und mehr Photonen werden emittiert. Schlecht durchblutete Bereiche können erkannt werden. In der Fluoreszenzmikroskopie werden fluoreszente Marker, die sich etwa an bestimmte Proteine anheften lassen, mit einem Laser angeregt und die resultierenden Photonen (die kleinen Akteure sind hier also ›Lichtteilchen‹) in Detektoren gezählt. So kann man auf die räumliche Verteilung von Proteinstrukturen in Zellen schließen und erhält wertvolle Information über diese Bausteine des Körpers. Eine grundlegende Technik, um leistungsstarke Mikroskope zu entwickeln, die einen wesentlich höheren Auflö-

Abb. 1: Extraktion und Matching: Zerlegung eines Fingerabdruckes in sein ›Skelett‹ zur Prüfung der Übereinstimmung von gefundenen Minutien (blaue Punkte sind Endungen, rote Punkte sind Verzweigungen), indem ihre Lage und Orientierung verglichen werden
Copyright: K. Mieloch, P. Mihailescu, A. Munk

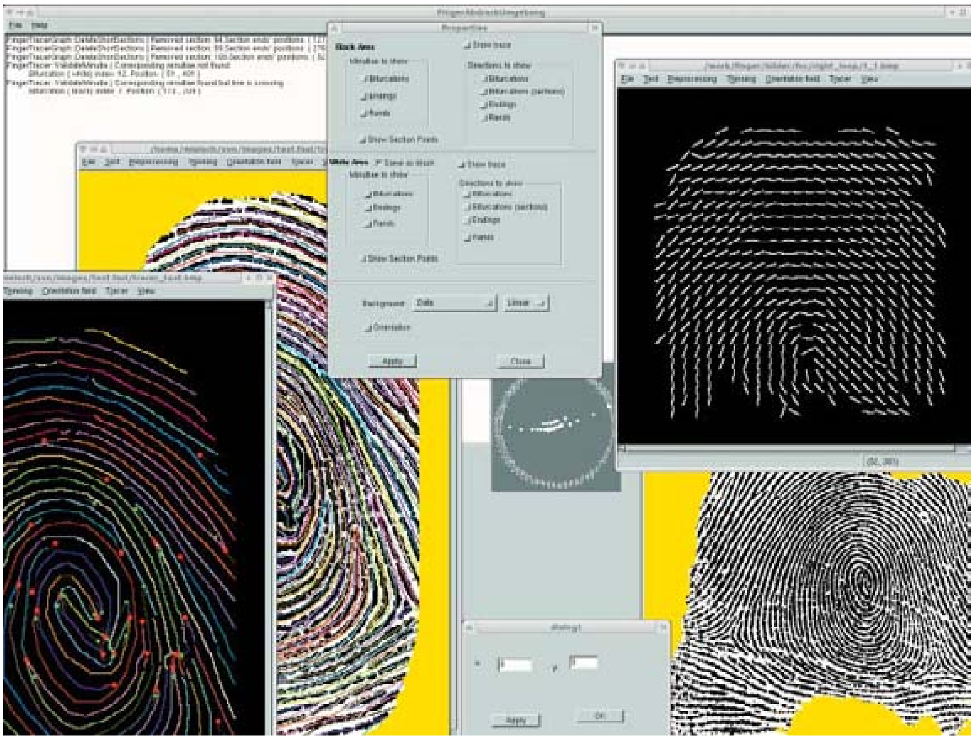


Abb. 2: Am Fingerprint Lab (FiLab) entwickelte Software aus der Arbeitsgruppe von P. Mihailescu (VW-Stiftungsprofessur: Explicite and Computational Methods in Number Theory and Pattern Recognition) und A. Munk
Copyright: K.Mieloch, P. Mihailescu, A. Munk

sungsgrad als herkömmliche Lichtmikroskope haben, geht auf bahnbrechende Arbeiten von Stefan Hell vom Göttinger Max-Planck-Institut für biophysikalische Chemie zurück. In einem gemeinsamen, vom Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) geförderten Verbundprojekt werden momentan statistische Methoden entwickelt, um zu verbesserten Bildrekonstruktionen zu gelangen. Die gezählten Photonen folgen demselben statistischen Gesetz wie in der PET: einem so genannten »Poisson-Prozess«.

Der Poisson-Prozess zur Modellierung spielt immer dann eine wichtige Rolle, wenn seltene Ereignisse gezählt werden. In der Versicherungsmathematik beispielsweise gelten Schäden in diesem Sinne als selten. Nicht viel anders verhält es sich mit den eingehenden Anrufen in einem Call Center oder den Verspätungszeiten der Bahn, deren Kenntnis wichtig für eine effiziente Standortplanung ist (vgl. dazu den Beitrag von Anita Schöbel). Sind diese Strukturen verstanden, werden Gemeinsamkeiten sichtbar und statistische Methoden lassen sich erfolgreich von einem Gebiet auf ein anderes übertragen. Fast immer steckt der Teufel jedoch im Detail, und problemspezifische Modifikationen der statistischen Verfahren werden notwendig. Die deutsch-schweizerische Forschergruppe »Statistische Regularisierung«, die von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) und dem Schweizer Nationalfonds (SNF) gefördert wird, hat sich für die nächsten Jahre zum Ziel gesetzt, solche universellen statistischen Strukturen und Modelle zu finden und für verschiedene Disziplinen nutzbar zu machen.

Die beschriebenen Beispiele stehen für eine Fülle von gemeinsamen statistischen Prinzipien, die auf den ersten Blick sehr unterschiedliche Disziplinen miteinander verbinden. Typischerweise fallen bei allen sehr große Datenmengen an. In einer sich immer stärker ausdifferenzierenden Wissenschaftslandschaft, in der man die Entwicklungen in Bereichen, die dem eigenen Arbeitsgebiet fern liegen, kaum noch verfolgen und verstehen kann, hat dies etwas Beruhigendes: Als Albert Einstein mit der Quantenphysik konfrontiert wurde, postulierte er 1926 in einem Brief an Max Born: *»Die Theorie liefert viel, aber dem Geheimnis des Alten bringt sie uns doch nicht näher. Jedenfalls bin ich überzeugt davon, dass der nicht würfelt.«* Heute dürfen wir sagen: Er würfelt doch – aber mit System.

Handelsraum in der Börse

Wetter, Börse, Industrie – überall steht Mathematik dahinter

Die mathematische Statistik selbst steht hier nur exemplarisch für viele Bereiche der Mathematik – eine Querschnittsdisziplin, die bewusst oder unbewusst in unzähligen Bereichen eingesetzt wird und eine tragende Rolle spielt. Oftmals ist allerdings kaum noch sichtbar, welchen Beitrag die Mathematik zu verschiedenen technologischen Entwicklungen leistet oder im Vorfeld geleistet hat. Mathematiker arbeiten oft im Hintergrund. Nur eine detaillierte Auseinandersetzung mit dem Gegenstand lässt erkennen, wie viel Mathematik nötig ist, um eine Produktionsstraße zu takten, Wettervorhersagen zu machen oder angemessene Preise für komplizierte Börsenkontrakte auszurechnen. Die grundlegende mathematische Theorie um diese ›Optionspreise‹ zu bestimmen, wurde beispielsweise schon Mitte der 1940er Jahre von dem japanischen Wahrscheinlichkeitstheoretiker Itō Kiyoshi entwickelt (und sogar in Grundzügen einige Zeit früher von dem Mathematiker Wolfgang Döblin, dem zweiten Sohn des Schriftstellers Alfred Döblin). Den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften für ihr Modell der Optionspreisbewertung erhielten Fischer Black and Myron S. Scholes im Jahre 1997. Ihr Modell lässt sich leicht aus dem Itō-Kalkül herleiten.

So verhält es sich mit vielen ›Erfindungen‹: Die Entwicklung der zugrunde liegenden mathematischen Theorie liegt häufig viele Jahre zurück. Bei ihrer Entstehung war oft nicht klar, wofür sie später gut sein sollte. Mathematische Theorien und Resultate – im Gegensatz zu Erfindungen – sind nicht patentrechtlich geschützt (und das ist auch gut so, denn jeder soll gleichermaßen davon profitieren können). Leider besteht häufig Gefahr, dass ihr Beitrag verloren geht oder nur noch wenig Beachtung findet. In der Öffentlichkeit wird der bedeutende Beitrag der Mathematik an vielen Entwicklungen deshalb nicht mehr angemessen gewürdigt. Stellen wir uns vor, Carl Friedrich Gauß hätte die komplexen Zahlen patentieren lassen (die unter anderem in der modernen Signalverarbeitung unverzichtbar sind) oder Itō den nach ihm benannten Kalkül, und jedes Telekommunikationsunternehmen oder jede Bank müsste dafür eine Schutzgebühr bezahlen …

Das Jahr der Mathematik kann einen Beitrag dazu leisten, dass Mathematik wieder stärker als das wahrgenommen wird, was sie für die Gesellschaft bedeutet, nämlich die einzigartige Möglichkeit, als Querschnittsdisziplin vielen täglichen Herausforderungen in den unterschiedlichsten Bereichen mit ihrem seit jeher stärksten Instrumentarium zu begegnen: Präzision, Klarheit und Struktur.

Deutsch-Schweizer Statistik-Forschergruppe: »Statistische Regularisierung unter qualitativen Nebenbedingungen – Inferenz, Algorithmen, Asymptotik und Anwendungen«

(red.) Zum 1. April 2008 wurde eine binationale Forschergruppe zum Thema »Statistische Regularisierung« in einer gemeinsamen Initiative von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) und dem Schweizer Nationalfonds (SNF) eingerichtet. Die Gruppe wird durch die DFG und den SNF insgesamt mit etwa zwei Millionen Euro in den ersten drei Jahren gefördert und arbeitet an den Standorten Göttingen, Mannheim, Bern und Zürich. Bei erfolgreicher Arbeit wird das Vorhaben für weitere drei Jahre gefördert. Dabei spielt die Universität Göttingen eine zentrale Rolle: Von den insgesamt 13 Teilprojekten entfallen sieben Projekte auf Göttingen, davon sechs auf die Mathematischen Fakultät (Prof. Dr. Thorsten Hohage, Prof. Dr. Axel Munk, Prof. Dr. Martin Schlather, Prof. Dr. Jeanette Woerner) und eines auf die Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät (Prof. Dr. Stefan Sperlich). Das Niedersächsische Ministerium für Wissenschaft und Kultur (MWK) unterstützt zusätzlich eines der Göttinger Projekte. Die Gesamtkoordination liegt bei Prof. Munk vom Institut für Mathematische Stochastik zusammen mit seinem Schweizer Kollegen Prof. Lutz Dümbgen von der Universität Bern. Die beiden Wissenschaftler hatten die Idee zu dieser Initiative vor zwei Jahren gemeinsam entwickelt.

Die binationale Forschergruppe zählt zu den ersten gemeinschaftlich von DFG und SNF finanzierten Forscherguppen. Die Förderorganisationen haben bei der Einrichtung des Programms intensiv zusammengearbeitet und mit den Wissenschaftlern Pionierarbeit geleistet. Die in dem Verbund kooperierenden Wissenschaftler legten hierzu einen gemeinsamen Antrag vor, der von DFG und SNF begutachtet wurde.

Der grundlegende Forschungsansatz besteht darin, auf den ersten Blick so verschieden scheinende Bereiche wie Systembiologie, Ökonometrie oder Atmosphärenforschung über die zugrunde liegende statistische Methodik, die statistische Regularisierung, zusammenzuführen. In den letzten Jahren haben sich in diesen Disziplinen eigene statistische Methoden mit großem Tempo entwickelt, und verblüffende Ähnlichkeiten werden erst neuerdings sichtbar. Auch wenn diese Gebiete augenscheinlich wenig miteinander zu tun haben: Die Forscher erwarten, dass die gemeinsame mathematische Sprache und die verwendeten statistischen Analysemethoden noch weitere verborgene Ähnlichkeiten offen legen werden.

Dementsprechend ist die Gruppe interdisziplinär besetzt: Statistiker, Mathematiker, Computerwissenschaftler und Ökonomen arbeiten eng zusammen. Die Forschergruppe ist zusätzlich mit weiteren renommierten Forschungseinrichtungen weltweit vernetzt, darunter den US-Universitäten in Florida, Berkeley und Stanford, der Universität Paris VI sowie der Wharton School of Business in Philadelphia. Bestandteil der Förderung ist folgerichtig ein Austauschprogramm für Gastwissenschaftler und Mitglieder der Gruppe.

Die beteiligten elf Wissenschaftler versprechen sich einerseits große Fortschritte für die eigene Disziplin durch das gegenseitige Lernen voneinander und anderseits ein tieferes Verständnis einheitlicher gemeinsamer Prinzipien und Strukturen. Eine Auftaktkonferenz zu diesem Thema fand vom 20. bis 22. November 2008 in Göttingen statt.

Weitere Informationen im Internet unter *www.stochastik.math.uni-goettingen.de/FOR916*.

The study of statistics (from lat. status) has emerged from the need to understand the behaviour of large complex systems, with the aim of developing strategies that allow the prediction of such systems and intervention into them. Typically, such systems are constituted by many small protagonists, and each of them is difficult to describe individually. They appear to us as random and non-predictable. Only as a whole do they display surprising principles and laws. Therefore, statistics plays a significant role in many areas of daily life, such as in insurance, in banking, or for the prediction of population development. It is less obviously apparent that together with mathematical modelling, statistical methods nowadays play a significant role in pattern recognition, biometrics, medical imaging and in the improvement of a new generation of microscopes, for example. Although at first glance these disciplines appear to us to differ greatly, common statistical problems and their rigorous mathematical formulation may lead to surprising similarities. Positron emission tomography enables a physician to visualize blood flow in, or metabolic activity of, an organ. To this end a biochemical metabolite (e.g. glucose) is labelled with a positron emitting radioactive material, and the resulting photons are counted using a PET scanner consisting of a number of detector tubes, positioned so that parts of the body are surrounded. These counts follow a certain probability law, a so-called Poisson process, which typically occurs when radioactive decay is observed. In a statistical model, a set of ›random‹ equations driven by the detector geometry and the underlying physics links these counts (and hence the Poisson process) to the intensity function of, say, the glucose concentration, which contains important information about the organ. This is an example of a statistical inverse problem where the aim is to reconstruct ›reversely‹ the intensity function from the random counts collected in the detector tubes. In fluorescent light microscopy a protein is labelled with a fluorescent marker, and from the resulting photon emissions the protein structure in a cell can be recovered. It turns out that exactly the same statistical model as for PET is suitable to describe this setting, the only difference being that the equations are now determined by the physics of the microscope instead of by the PET scanner. Again, a Poisson process describes very well the random nature of the photon counts. Poisson processes are often used for modelling rare events and an insured loss is (hopefully) a rare event, in general. Hence, this suggests that similar statistical methods link such different fields as nanooptics and insurance mathematics. This often allows transfer of statistical methods from one area of application to another, and hidden commonalities arise. These and related issues are currently being investigated within a German-Swiss research group by statisticians, computer scientists, numerical analysts and econometricians in Göttingen together with colleagues from Bern, Mannheim and Zürich.

Historically, since the work of C. F. Gauss some 200 years ago the Georg-August-Universität has been strongly associated with the development of mathematical statistics and insurance mathematics. In 1895 on the initiative of Felix Klein (1849 – 1925) the first seminar for actuarial sciences was set up in Göttingen. Further developments are also closely linked with Göttingen scientists such as Wilhelm Lexis (1837 – 1914) and Felix Bernstein (1878 – 1956), founder of the Institute of Mathematical Stochastics.

Prof. Dr. Axel Munk, Jahrgang 1967, studierte von 1987 bis 1992 Mathematik und Philosophie an der Universität Göttingen. Nach dem Diplom wurde er 1994 als Stipendiat der Studienstiftung des Deutschen Volkes in Mathematischer Statistik in Göttingen promoviert. Anschließend war er mit einem DFG-Forschungsstipendium an der TU Dresden, der Cornell University und der Wharton School of Buisiness in Philadelphia tätig. Von 1995 an arbeitete er an der Ruhr-Universität Bochum als Hochschulassistent und habilitierte sich dort 1999 in Mathematik. Nach Professuren in Siegen und Paderborn wurde er 2002 auf den Lehrstuhl für Mathematische Stochastik nach Göttingen berufen. Zwischenzeitliche Gastaufenthalte führten ihn unter anderem an die University of Florida und die University of North Carolina. Sein Arbeitsgebiet ist die angewandte und mathematische Statistik mit einem Schwerpunkt in der Regressionsanalyse und der statistischen Bildverarbeitung. Er ist Gründungsmitglied des Statistischen Zentrums und des Courant Forschungszentrums »Poverty, Equity and Growth in Developing and Transition Countries«, Sprecher der DFG-SNF Forschergruppe »Statistische Regularisierung«, Teilprojektleiter am Sonderforschungsbereich »Nanoscale Photonic Imaging« und im BMBF-Verbundprojekt ›INVERS‹ im Rahmen der BMBF Initiative »Gesundheit und Medizintechnik«, Koordinator des DFG Projektes »Geodätische Hauptkomponentenanalyse« sowie stellvertretender Sprecher des Graduiertenkollegs »Identifikation in mathematischen Modellen«.

Armut messen, erklären und überwinden

Armutsforschung, Mathematik und Statistik

Stephan Klasen

Nach den neuesten Zahlen der Weltbank leben 1,4 Milliarden Menschen in extremer Armut. Das ist die schlechte Nachricht. Die gute Nachricht ist: In den letzten zwei Jahrzehnten hat die Zahl der Menschen in absoluter Armut um über 500 Millionen abgenommen und es wird erwartet, dass sie in den nächsten zehn Jahren noch einmal um einige Hundert Millionen Menschen abnehmen wird. Wie werden diese Kennziffern erhoben, wie verlässlich sind sie und wie sind sie zu interpretieren? Letztlich stellt sich natürlich die Frage, wie kann man Armut bekämpfen? Nur die richtigen Ausgangsfragen, aussagekräftige Daten und korrekte Berechnungen sowie schlüssige Interpretationen können den Weg zu politischen Lösungen weisen.

Armut ist ein vielschichtiges Phänomen, das von vielen Betroffenen sehr unterschiedlich empfunden und erfahren wird. Es hängt sicherlich nicht nur vom fehlenden Einkommen ab. Armut, vor allem in Entwicklungsländern, hängt auch mit verringerten Bildungschancen, schlechter medizinischer Versorgung, ungesunder Umwelt, fehlender adäquater Behausung und fehlendem Zugang zu sauberem Wasser sowie mit gesellschaftlicher Stigmatisierung und ähnlichen Problemen zusammen. Um wirksame Maßnahmen gegen Armut ergreifen zu können, muss dieses Phänomen allerdings klar definiert und gemessen sowie die Ursachen analysiert werden. Hier spielen Mathematik und Statistik, in enger Verbindung mit der Volkswirtschaftslehre, eine entscheidende Rolle.

Während Armut schon bei den alten Griechen, im Alten und Neuen Testament und bei Adam Smith, dem Urvater der Volkswirtschaftslehre, thematisiert wurde, ist die moderne quantitative Armutsforschung vergleichsweise jung. Ein erster Versuch der Armutsmessung wurde in England von Seebohm Rowntree im Jahr 1913 unternommen. Er dokumentierte das Ausgabenverhalten von Arbeiterfamilien, um damit Armut besser erfassbar zu machen.

Arm oder relativ arm? Moderne Armutsforschung nach dem 2. Weltkrieg

Nach dem 2. Weltkrieg wurde das Thema wieder aufgenommen, und dieser Zeitpunkt markiert den Beginn der modernen theoretischen und empirischen Armutsforschung. Armutsmessung erfolgt in zwei Schritten: In einem ersten Schritt muss definiert werden, wer in einer Bevölkerung als arm gilt und wer nicht. Das heißt, man braucht eine Armutslinie, die die Armen von den Nichtarmen trennt. Die erste Armutslinie wurde in den 1950er Jahren in den USA entwickelt und findet heute noch Anwendung. Arm gilt in den USA, wer weniger Einkommen hat, als er benötigen würde, um einen Warenkorb von lebensnotwenigen Gütern zu kaufen. Dieser Warenkorb ist ein von Ernährungsfachleuten zusammengestellter preisgünstiger Speiseplan, multipliziert mit dem Faktor drei, um Kosten für Wohnung, Kleidung, etc. zu berücksichtigen.

Der zweite Schritt ist die Aggregation der Armen in Bezug auf die gesamte Bevölkerung. Summiert man einfach nur die Anzahl der Armen auf? Oder wird berücksichtigt, dass manche der Armen deutlich ärmer sind als andere? Je nachdem, wie Armutslinien gesetzt und das Aggregationsproblem gelöst wird, kann man verschiedene Armutsmaße herleiten und damit auch die oben genannten Zahlen erklären. Bei der Messung der globalen Armut, die zur Zahl von 1,4 Milliarden Menschen führte, wird die Armutslinie bei einem Einkommen von 1.25 US Dollar pro Kopf und Tag gesetzt, wobei diese Armutslinie aufgrund von Kaufkraftunterschieden verschiedener Währungen angepasst wird. Das ergibt ein absolutes Armutsmaß, das überall dasselbe Niveau hat. Wenn die Einkommen der Armen steigen, wird die Armut sinken. Aggregation erfolgt über die Summenbildung. Manchmal wird damit auch die so genannte Armutsquote berechnet, die den Anteil der Armen an der Gesamtbevölkerung angibt.

Bei der Berechnung von Armut in Deutschland werden Haushalte, die weniger als 60 Prozent des Durchschnittseinkommens verdienen, als arm bezeichnet. Hier handelt es sich um ein relatives Armutsmaß. Wenn alle in Deutschland gleichermaßen reicher werden, steigt auch das Durchschnittseinkommen, und damit würde sich an der Armut nichts ändern. Armut wird nur dann reduziert, wenn sich das Einkommen der Armen relativ zum Durchschnittseinkommen ändert. Auch hier wird die Armutsquote einfach über Summenbildung errechnet. Aber man könnte natürlich auch andere Arten der Aggregation vornehmen, die sicherlich das Phänomen besser abbilden würde. Solche Armutsmaße wurden in den 1960er und 1970er Jahren unter anderem von den Wissenschaftlern David Watts, Amartya Sen, James Foster, J. Greer und E. Thorbekke im Rahmen der axiomatischen Armutsforschung entwickelt. Zum Beispiel schlagen Foster, Greer und Thorbekke die Armutslücke als alternatives Aggregationsmaß vor. Hier werden nicht einfach die Armen gezählt, sondern die jeweilige Distanz der Einkommen der Armen zur Armutslinie quantifizert. Je weiter die Einkommen der Armen unter der Armutsgrenze liegen, desto größer die Armut. In einem alternativen Maß schlagen sie vor, die Distanz zur Armut zu quadrieren und damit tiefe Armut besonders stark zu gewichten. Diese axiomatische Armutsforschung ist untrennbar mit Mathematik verbunden. Diese Maße werden nämlich hergeleitet, indem man wünschenswerte Axiome über Armutsmaße postuliert und dann analytisch herleitet und beweist, welche Maße diese Axiome erfüllen (und welche nicht).

Dynamische Komponenten für differenziertere Aussagen

Während diese Erkenntnisse sich schon in der Literatur etabliert haben, wird die axiomatische Armutsforschung gegenwärtig weiterentwickelt und um eine dynamische Komponente ergänzt, die das Armutsrisiko beziehungsweise die Verweildauer in der Armut berücksichtigt. Wie kann man identifizieren und aggregieren, welche Haushalte und Personen von chronischer Armut betroffen sind; wie kann man demgegenüber Haushalte in einem dynamischen Armutsmaß berücksichtigen, die einem beständigen Armutsrisiko ausgesetzt sind, aber deren Einkommen nur zeitweise unter die Armutslinie sinkt? Diese Themen der dynamischen Armutsmessung sind Teil des Forschungsprogramms des neu gegründeten Courant Zentrums »Armut, Ungleichheit und Wachstum in Entwicklungsländern: Statistische Methoden und empirische Analysen«, das mit Mitteln der Förderlinie 3 der Exzellenzinitiative des Bundes und der Länder in diesem Jahr an der Georg-August-Universität Göttingen eingerichtet wurde. Im Zentrum arbeiten Entwicklungs- und Agrarökonomen, Mathematiker und Statistiker zusammen, um sich dem Problem der Messung und Analyse von Armut zu widmen.

Um Armut tatsächlich messen und interpretieren zu können, benötigt man geeignete Daten. Hier spielt Statistik eine entscheidende Rolle. Mit der Definition von Armutslinien nach dem 2. Weltkrieg wurden auch in mehreren Ländern Daten erhoben, um Armut empirisch zu messen. Hier war neben den USA interessanterweise Indien einer der Vorreiterstaaten. Seit Anfang der 1950er Jahre werden dort in fast jedem Jahr über 100.000 Haushalte über ihr Ausgabeverhalten befragt. Mit den Daten aus dieser Stichprobe wird anschließend bestimmt, in wie vielen Haushalten der Konsum unterhalb der Armutslinie liegt. Statistische Überlegungen entscheiden über die Größe der Stichprobe, die Identifikation von Haushalten, die befragt werden, die Verwendung von Gewichten bei der Aggregation und die Berechnung von Verlässlichkeit der berechneten Armutsquoten. Obschon letztere häufig nicht berichtet wird, gehört zu jeder berichteten Armutsstatistik ein Konfidenzintervall, mit dem man die Verlässlichkeit der berechneten Rate einschätzen kann. Je nachdem, wie die Daten erhoben werden, kann die Berechnung dieser Konfidenzintervalle recht komplex sein.

Vier Themen der Armutsforschung

Während diese statistischen Probleme schon recht lange bekannt sind und es eine Reihe von geeigneten Lösungen gibt, wird die Sache komplexer, wenn es um die Analyse von Armut geht. Hier tauchen schwierigere statistische Fragestellungen auf. Vier davon seien beispielhaft genannt, da sie wichtige Forschungsthemen im neuen Courant Zentrum sind. Eine Problemstellung ist die Frage nach der Richtung der Kausalität bei der Suche nach den Ursachen der Armut. Betrachten wir zum Beispiel den kausalen Zusammenhang zwischen Familiengröße und Armut. In fast allen Ländern der Welt, reichen wie armen, sind große und kinderreiche Familien häufiger arm als kleine Haushalte. Unklar ist allerdings die Kausalität. Führen Kinder zu mehr Armut oder haben arme Menschen mehr Kinder? Oder bleiben in armen Haushalten die Kinder einfach nur länger zu Hause, anstatt sich selbstständig zu machen und führen dadurch zu größerer Armut? Mit einfachen Korrelationen lassen sich diese Fragen nicht beantworten. Stattdessen müssen hier statistische Verfahren zum Einsatz kommen, die versuchen, diese kausalen Zusammenhänge separat zu testen. Zum Beispiel werden Instrumentenvariablen benutzt oder Paneldatenmethoden angewendet, um diese Probleme zu lösen. Mit Instrumentenvariablen versucht man Variablen zu finden, die die Kinderzahl beeinflussen, aber nicht direkt die Armut. Bei Panelmethoden werden Haushalte über mehrere Jahre hinweg beobachtet, um zu überprüfen, ob zuerst die Armut oder zuerst der Kinderreichtum zu beobachten war. Solche Daten sind allerdings nur vereinzelt erhältlich und gerade in Entwicklungsländern noch eher selten. Deshalb erhebt zum Beispiel die DFG-Forschergruppe »Vulnerability to Poverty«, in der Göttinger Entwicklungsökonomen gemeinsam mit Forschern der Universitäten Frankfurt und Hannover an der dynamischen Messung von Armut und deren Ursachen arbeiten, solche Paneldaten gegenwärtig in Thailand und Vietnam. Man stellt fest, dass die Kausalität hier stark kontextabhängig ist. In vielen sehr armen Entwicklungsländern ist das Problem eher, dass ärmere Haushalte mehr Kinder haben, während in reichen Ländern Kinderreichtum Armut verursacht, weil vor allem die fehlende außerhäusliche Kinderbetreuung die Verdienstmöglichkeiten von Müttern einschränkt.

Armut in Deutschland: Berliner Bürger, darunter viele Familien mit Kindern, versorgen sich mit Lebensmitteln bei einer Berliner Tafel.
© Ullstein

Eine zweite Frage ist, welche Faktoren die räumliche Verteilung der Armut determinieren. Armut ist regional sehr unterschiedlich verteilt. Ist das nur Zufall? Liegt das an der unterschiedlichen regionalen Ausstattung der Bevölkerung mit Bildung und Produktionsgütern? Oder gibt es regionale »Armutsfallen« in dem Sinne, dass in manchen Regionen das schlechte wirtschaftliche und soziale Umfeld bedingt, dass Menschen dort in Armut verbleiben, die an anderen Orten möglicherweise erfolgreich wären? Hier bieten Erkenntnisse der räumlichen Statistik einige Antworten. Man kann in statistische Modelle von Armut eine räumliche Dimension als zusätzlichen Faktor einbauen. Dies ist ein aktives Forschungsfeld für Mathematiker und Statistiker, die sich mit räumlicher Modellierung befassen.

Ein dritter Forschungsstrang beschäftigt sich mit der Vielschichtigkeit der Armut. Zumeist wird Armut nur am Einkommen festgemacht, aber dies ist eine grobe Vereinfachung und Verzerrung der tatsächlichen Situation. Wenn man Armut als geringere Lebensqualität oder, wie der indische Wirtschaftsnobelpreisträger und Ehrendoktor der Universität Göttingen Amartya Sen es bezeichnen würde, als »Mangel an Fähigkeiten und Möglichkeiten, ein lebenswertes Leben zu führen«, sieht, stellt mangelndes Einkommen nur eine Dimension dar. Gerade in Entwicklungsländern kann geringe Lebensqualität auch mit Mangel an Bildung, Krankheit, gesellschaftlicher Stigmatisierung und Isolation zusammenhängen, selbst wenn das Einkommen über der Armutsgrenze liegt. Wenn man eine solche multidimensionale Konzeption zugrunde legt, stellt sich sofort die Frage, wie man diese Dimensionen der Armut miteinander verbindet, beziehungsweise gewichtet. Ist man nur dann arm, wenn man in jeder Dimension Mangel aufweist, oder ist man schon arm, wenn man in einer Dimension als arm bezeichnet würde? Dies sind zum Teil schwierige konzeptionelle Fragen, sie bergen aber auch statistische Probleme. Wie kann man durch geeignete statistische Methoden diese multidimensionale Sicht von Armut auf wenige Dimensionen reduzieren, anhand derer das Problem messbar ist? Hier werden verschiedene Verfahren der Faktoren- oder Hauptkomponentenanalyse verwandt, um solche Dimensionenreduktion zu betreiben. Aber auch dies ist ein aktives Forschungsfeld und ein wichtiges Thema im Courant Forschungszentrum.

Schließlich beschäftigt sich eine vierte wichtige Frage mit der Transmission von Preisen und anderen Marktsignalen, gerade auch im ländlichen Raum. Der jetzige weltweite Preisauftrieb bei Grundnahrungsmitteln ist ein gutes Beispiel. Eigentlich sollten viele ärmere Haushalte in Entwicklungsländern davon profitieren. Diese Familien leben nämlich zumeist in ländlichen Gegenden, sind Selbstversorger und vermarkten häufig einen kleinen Überschuss an Nahrungsmitteln, um sich mit anderen Gütern zu versorgen. Höhere Preise würden höhere Einkommen bedeuten. Aber die entscheidende Frage ist, ob und wann diese höheren Weltmarktpreise überhaupt in entlegenen ländlichen Gegenden ankommen. Dauert das Wochen oder Monate, oder kommen sie gar nie an, weil Zwischenhändler die höheren Preise nie an die Bauern weiterreichen? Wie schnell werden umgekehrt die gestiegenen Preise für Düngemittel und Pestizide an die Bauern weitergereicht? Auch hier sind statische Methoden gefordert, diesmal aus der Zeitreihenökonometrie, bei der die Korrelationen zwischen Preisserien, auch in Abhängigkeit von natürlichen Barrieren und vorhandener Infrastruktur, in unterschiedlichen Märkten eines Landes untersucht werden. Auch dies ist ein Thema des Courant Forschungszentrums, dem sich besonders die Agrarökonomen widmen.

Man kann vielleicht den Eindruck gewinnen, dass diese Beispiele doch eher auf potenziell interessante, aber doch realitätsferne akademische Spielereien hinauslaufen. Aber das wäre weit gefehlt: Bei den vier Beispielen, wie auch den anderen Themen der Armutsforschung, lässt sich eine direkte Politikrelevanz ableiten. Mit der Erforschung eines kausalen Zusammenhangs zwischen Armut und Familiengröße kann die Politik besser verstehen, ob die erfolgreiche Geburtenkontrolle oder alternativ eine bessere Familienförderung und Vereinbarkeit von Beruf und Familie Erfolg versprechende Instrumente sind, um das Problem der Kinderarmut in den Griff zu bekommen. Ebenso geben räumliche Armutsfallen Anlass, ihnen mit einer gezielten Regionalpolitik entgegenzuwirken. Nur ein besseres Verständnis der Vielschichtigkeit von Armut kann dazu führen, dass man adäquat

Sri Lanka, Galle: Markt. Obst, Gemüse, Früchte, Gewürze und andere Lebensmittel werden hier von den Bauern und Händlern der Gegend verkauft. © Ullstein

Courant Forschungszentrum »Armut, Ungleichheit und Wachstum in Entwicklungsländern: Statistische Methoden und empirische Analysen«

(red.) 1,4 Milliarden Menschen oder circa 26 Prozent der Bevölkerung in Entwicklungsländern leben in extremer Armut. Auf dem Millenniumsgipfel im Jahr 2000 wurde Armutsbekämpfung von der Weltgemeinschaft als zentrales Ziel formuliert, die Fortschritte bisher sind jedoch unzureichend und regional sehr ungleich verteilt. Um der Armut mit angemessenen Maßnahmen begegnen zu können, müssen ihre Einflussfaktoren theoretisch und empirisch genauer analysiert werden.

Auf den daraus folgenden erheblichen Forschungsbedarf hat die Georg-August-Universität Göttingen mit der Einrichtung eines neuartigen Forschungszentrums reagiert. Unter der Leitung des Göttinger Ökonomen Prof. Stephan Klasen, Ph.D., wurde im Frühjahr 2008 das Courant Zentrum »Armut, Ungleichheit und Wachstum in Entwicklungsländern: Statistische Methoden und empirische Analysen« gegründet. Die Einrichtung von zunächst fünf Courant Forschungszentren an der Universität Göttingen ist Teil des Zukunftskonzeptes der Universität, mit dem sie in 2007 in der Exzellenzinitiative des Bundes und der Länder erfolgreich war. Es umfasst vier Maßnahmen: Brain Gain, Brain Sustain, Lichtenberg-Kolleg, Göttingen International. Sie sollen deutsche und ausländische Spitzenforscher anziehen und an die Universität binden sowie die Entwicklung eines gemeinsamen Forschungscampus mit den außeruniversitären Forschungseinrichtungen in Göttingen beschleunigen. Eine der Schlüsselmaßnahmen im Rahmen von Brain Gain ist die Unterstützung von Nachwuchsforschungsgruppen in den Courant Forschungszentren.

Im Courant Forschungszentrum »Armut, Ungleichheit und Wachstum in Entwicklungsländern: Statistische Methoden und empirische Analysen« werden insbesondere Fragen von dynamischer Armutsmessung, Determinanten der Armut, Transmission von Preisen und Politikmaßnahmen in ländlichen Gegenden, und die dazugehörigen statistischen Methoden thematisiert. An dem Zentrum sind Stephan Klasen, Axel Dreher, Carola Grün und Stefan Sperlich, Walter Zucchini aus der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät, Bernhard Brümmer, Stephan von Cramon-Taubadel und Matin Qaim aus der Agrarwissenschaftlichen Fakultät sowie Axel Munk und Martin Schlather aus der Mathematischen Fakultät beteiligt. Drei Nachwuchsforschergruppen werden eingerichtet: Die erste befasst sich schwerpunktmäßig mit den Determinanten von Armut und ihrer Messung; die zweite konzentriert sich auf Fragen ländlicher Märkte, Transmission von Preisen und den Zugang zu (landwirtschaftlicher) Technologie; eine dritte beschäftigt sich mit Fragen von empirischen Methoden und Statistik. Für alle drei Forschergruppe wurden hochqualifizierte Nachwuchswissenschaftlerinnen und Wissenschaftler gefunden: Die Methodengruppe ist mit Juniorprofessorin Tatyana Krivobokova aus Kasachstan schon besetzt, und kürzlich haben die Kolumbianerin Marcela Ibanez-Dias und der Chinese Xiahua Yu die Angebote für Juniorprofessuren in der »Armuts- und Transmissionsgruppe« angenommen. Darüber hinaus verstärkt der äthiopische Ökonom Admassu Shiferaw als post-doc die »Armutsgruppe«.

Mit welchen Instrumenten Armut angemessen identifiziert, definiert, gemessen und quantifiziert werden kann, gehört ebenso in das Spektrum der Fragestellungen wie die Frage nach Armutsrisiken in unterschiedlichen Regionen. Gängige Darstellungen von Kausalitäten zwischen Einkommensstruktur, Bildungszugang und regionalen Besonderheiten werden kritisch hinterfragt. Die Forscher interessiert, unter welchen Bedingungen es Bevölkerungsgruppen gelingen kann, sich und/oder nachwachsende Generationen aus der Armut zu befreien. Sie möchten die Determinanten identifizieren, die zu einer Steigerung der landwirtschaftlichen Produktivität, einer verbesserten Einkommenssituation und besseren Bildungschancen führen können. Umgekehrt fragen sie, warum politische Reformen oder technologische Neuerungen häufig nicht den gewünschten Effekt haben. Der Einfluss von politischen, ökonomischen und agropolitischen Interventionen auf die Armutsentwicklung in unterschiedlichen Regionen der Welt ist ein wesentlicher Untersuchungsgegenstand.

Das Courant Forschungszentrum knüpft damit an bereits erfolgreich arbeitende interdisziplinäre Forschergruppen mit Göttinger Beteiligung an: die DFG Forschergruppe »Impact of shocks on the vulnerability to poverty: consequences for development of emerging Southeast Asian economies« (gemeinsam mit den Universitäten Hannover, Frankfurt am Main und Gießen), den Göttinger Sonderforschungsbereich STORMA (»Stability of Rainforest Margins«), das internationale Forschungsnetzwerk »Poverty, Equity, and Growth Network« sowie die Deutsch-Schweizer Statistik-Forschergruppe »Statistische Regularisierung unter qualitativen Nebenbedingungen – Inferenz, Algorithmen, Asymptotik und Anwendungen«.

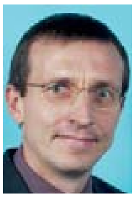
gegensteuern kann. Schließlich hängt die Wirkung von Politik auch von der Transmission dieser Signale über Raum und Zeit ab. Die quantitative Armutsforschung, die mithilfe neuer statistischer Methoden versucht, das Problem besser zu erfassen, kann einen wichtigen Beitrag dazu leisten, die Grundlagen für erfolgreichere Armutsreduktion zu schaffen – vor allem in den Entwicklungsländern.

According to the most recent data from the World Bank, about 1.4 billion people in the world are living in absolute poverty. Measuring and analyzing this poverty is a prerequisite for designing appropriate interventions for overcoming it. While much of this analysis is done by economists and other social scientists, basic tools of poverty analyses come from mathematics and statistics. This short article highlights these linkages between economics, mathematics, and statistics in studying world poverty.

Poverty is a multidimensional phenomenon. But to capture it adequately requires a quantitative representation. And here the tools of mathematics have proven to be indispensable. In particular, so-called axiomatic poverty measurement, where desirable axioms about poverty measures are postulated and resulting poverty measures have been derived, has proven critical for formalizing our concepts of poverty and rendering them measurable as a result. This way, for example, poverty measures have been devised that do not only count the poor, but appropriately consider the depth of poverty and the distribution of incomes among the poor in the analysis.

Currently the frontier of poverty research has moved to dynamic concepts of poverty where one attempts to capture poverty risk, sometimes also called vulnerability to poverty, and distinguish between chronic and transitory poverty. Developing and applying measures to capture poverty in this dynamic sense is one of the themes of the newly-founded Courant Research Centre ›Poverty, Equity, and Growth in Developing and Transition Countries: Statistical Methods, Empirical Analyses and Policy Issues‹ which has received seed funding from the so-called Excellence Initiative.

A second focus of the newly established research centre concentrates on the empirics of poverty analysis. Here statistical methods play a very important role and, appropriately, the centre includes four senior researchers from the fields of statistics and econometrics. Among the empirical issues to be addressed in poverty research are causality issues. For example, there is a clear and strong association between poverty and household size, with large households being poorer in virtually all developing countries. But the direction of causality is unclear. Here, appropriate statistical techniques can be of considerable help. Similarly, analysis of the distribution and development of poverty across space and time requires new methods of spatial statistics that are currently being developed. Third, statistical dimension-reduction techniques are critical to capture the essence of this multidimensional concept. Lastly, when thinking about anti-poverty policies, the transmission of such policies as well as market signals across space is a crucial factor influencing the timing and success of such initiatives. Thus the marriage between economic poverty research, statistics and mathematics allows a much better understanding of the trends and determinants of poverty and the potential of policy to affect. These are then logically the themes of the new research centre.



Prof. Stephan Klasen, Jahrgang 1966, studierte Wirtschaftswissenschaften an der Harvard University, Cambridge (USA) und schloss sein Studium 1994 mit einem Ph.D. in Economics ab. Als Research Assistent arbeitete Stephan Klasen für seinen Doktorvater Amartya Sen (Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften 1998). Nach Tätigkeiten für die Weltbank in Washington und Johannesburg (Südafrika) setzte er seine wissenschaftliche Karriere am Centre for History and Economics 1996 in Cambridge, Großbritannien, fort. Im Jahr 1998 wurde der Ökonom an die Universität München (LMU) berufen und wechselte im September 2003 auf den Lehrstuhl für Entwicklungsökonomie und Empirische Wirtschaftsforschung an die Universität Göttingen. Hier leitet er das Ibero-Amerika Institut für Wirtschaftsforschung. Schwerpunkte seiner Forschung und Lehre sind: Armut, Ungleichheit und Wohlstand, Determinanten der Arbeitslosigkeit, Unterernährung und Kindersterblichkeit sowie armutsorientiertes Wirtschaftswachstum. Zu diesen Themen ist er an zahlreichen Drittmittelprojekten als Projektleiter beteiligt. Prof. Klasen ist Koordinator des Courant Forrschungszentrums »Armut, Ungleichheit und Wachstum in Entwicklungsländern«. Als Mitglied des European Development Network und des wissenschaftlichen Beirats des Bundesministeriums für wirtschaftliche Zusammenarbeit und Entwicklung berät der Wissenschaftler die Politik. Prof. Klasen ist Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen.

Tatyana Krivobokova

Die Realität hinter den Daten

von Heidi Niemann

»Ich bin ein leidenschaftlicher Statistiker, und ich will, dass Sie das auch werden.« Gleich beim ersten Gespräch mit ihrem zukünftigen Doktorvater bekam Tatyana Krivobokova diesen Satz zu hören. In ihrer Heimat hatte die 34-Jährige zunächst an der Kasachischen Nationalen Universität in Almaty Angewandte Mathematik studiert. Nach dem Diplom siedelte sie nach Deutschland um, wo sie an der Universität Kaiserslautern ein Masterstudium in Finanzmathematik absolvierte. Da es für diesen internationalen Studiengang keine Stipendien gab, musste sie sich ihren Lebensunterhalt selbst verdienen. Die Mathematikerin fand eine Stelle am Fraunhofer-Institut für Experimentelles Software Engineering. Zu ihren Aufgaben gehörte unter anderem die Auswertung von Daten. So kam sie erstmals mit dem Tätigkeitsfeld der Statistik in Berührung. Nach dem Masterbbschluss wechselte sie an die Universität Bielefeld, um dort an der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften zu promovieren. Anschließend arbeitete sie als Postdoktorandin an der Katholischen Universität Leuven in Belgien.

Jetzt steht Tatyana Krivobokova vor ihrer nächsten Herausforderung: Seit Juli 2008 ist sie Juniorprofessorin und Leiterin einer Nachwuchsgruppe an der Universität Göttingen. Die aus Mitteln der Exzellenzinitiative finanzierte Gruppe gehört zum Courant Forschungszentrum »Armut, Ungleichheit und Wachstum in Entwicklungsländern: Statistische Methoden und empirische Analysen«, in der sie das Teilgebiet »Econometrics and Statistical Methods« bearbeitet. Die Statistikerin reizt dabei nicht nur die interdisziplinäre Ausrichtung dieser Forschungen, sondern auch der konkrete Bezug zur sozialen Realität. Die Auswertung von Zahlenkolonnen und Tabellen könne dabei helfen, komplexe Zusammenhänge zu erfassen, zu entschlüsseln und angemessene Lösungen für Probleme zu finden. »Mein Doktorvater hat mich gelehrt: Statistik ist die Kunst, aus Daten Informationen zu gewinnen«, betont Tatyana Krivobokova.

Die Wissenschaftlerin wird statistische Methoden entwickeln, die auf die speziellen Fragestellungen der im Courant Forschungszentrum forschenden Wirtschafts- und Agrarwissenschaftler zugeschnitten sind. »Wir sind damit die methodischen Problemlöser für die anderen Forscher«, sagt die Mathematikerin. Gerade auf dem Gebiet der Entwicklungsländerforschung gebe es einen großen Bedarf an speziellen Methoden der Statistik. Um beispielsweise die Ursachen der hohen Kindersterblichkeit in einem afrikanischen Land zu ergründen, müssen die Wissenschaftler den Einfluss und die Wechselwirkungen vieler unterschiedlicher sozialer und gesundheitlicher Faktoren untersuchen. Dazu gehören zum Beispiel Ernährung, ärztliche Versorgung oder Umweltbelastungen. Erst durch das Zusammentragen und die Auswertung entsprechender Daten erschließen sich die komplexen Zusammenhänge. Je gründlicher die Analyse, desto passgenauer lassen sich Lösungsansätze entwickeln.

Tatyana Krivobokova freut sich, dass bereits alle Forschungsmittel zur Verfügung stehen und sie sofort mit dem Aufbau ihrer Nachwuchsgruppe beginnen kann. Dabei schätzt sie das gesamte Forschungsumfeld in Göttingen. »Ich wurde gleich gefragt, ob ich in einem Graduiertenkolleg an der Mathematischen Fakultät mitwirken möchte.« Über die Georgia Augusta sagt die junge Wissenschaftlerin: »Es gibt hier so tolle Voraussetzungen und so viele Möglichkeiten zu forschen – man muss nur alles schaffen.«


2

Warten oder nicht warten?

Optimierung im öffentlichen Verkehr

Anita Schöbel

»Meine Damen und Herren, unser Zug hat derzeit leider eine Verspätung von 15 Minuten, sodass wir Göttingen voraussichtlich um 17.16 Uhr erreichen werden. Über Ihre Anschlussverbindungen in Göttingen werden wir Sie noch rechtzeitig informieren.« Ähnliche Durchsagen hat wohl jeder Bahnreisende schon einmal gehört. Ist Göttingen der Endbahnhof der Reise, ist so eine Verspätung lästig. Möchte ein Fahrgast aber noch in einen anderen Zug umsteigen, beginnt für ihn oft eine Zitterpartie: Wird mein Anschlusszug warten? Werde ich es schaffen, wenn ich schnell zum Abfahrtsgleis renne? Wie komme ich weiter, wenn ich den Zug nicht mehr erreiche?

Anschlusssicherung im öffentlichen Verkehr

Die Entscheidung, ob ein Zug auf einen verspäteten Zubringer warten soll oder nicht, wird derzeit in den Dispositionszentralen der Deutschen Bahn getroffen. Für Göttingen zuständig ist die Dispositionszentrale in Hannover. Bei ihren Entscheidungen greifen die Disponenten auf feste Wartezeitregeln (und ihre oft langjährigen Erfahrungen) zurück. Bei einem Gesamtumfang von täglich 33.000 Zügen auf mehr als 34.000 Kilometer Gleisen lässt sich aber leicht vorstellen, dass die Auswirkungen von (sich teils gegenseitig beeinflussenden) Dispositionsentscheidungen kaum überschaubar sind. Schon bei einem einzigen Anschluss mit einem verspäteten Zubringerzug und einem einzigen Abbringer müssen verschiedene Kundengruppen betrachtet werden: Wie viele Passagiere wollen umsteigen? Wann fährt der nächste Anschlusszug? Wie viel Verspätung muss der Abbringerzug in Kauf nehmen, wenn er wartet? Ist das nachfolgende Gleis zu der späteren Abfahrtszeit überhaupt frei? Wie viele Passagiere sitzen in dem Abbringer und werden sie wiederum nachfolgende Anschlüsse erreichen?

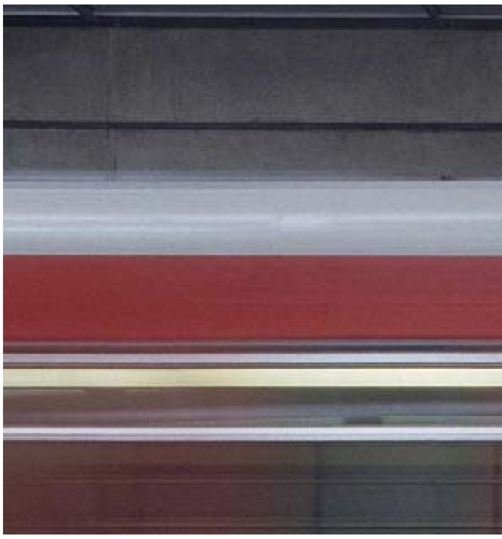
Um solch ein komplexes System mit all seinen Einschränkungen und Übertragungen besser zu verstehen und darauf basierend »gute« Dispositionsentscheidungen treffen zu können, wurde an der Universität Göttingen ein mathematisches Modell zur Anschlusssicherung für den Zugverkehr entwickelt.

Modell

Im Fall von (unvorhergesehenen) Verspätungen geht es darum, den geplanten Fahrplan online – also möglichst schnell! – zu einem *Dispositionsfahrplan* anzupassen. Dieser soll die aus den Quellverspätungen resultierenden Folgeverspätungen möglichst gering halten. Dazu müssen zwei grundsätzliche Typen von Entscheidungen getroffen werden:

– Warten oder nicht warten? (Anschlusskonflikte): Soll ein Anschlusszug auf einen verspäteten Zubringerzug warten oder soll er pünktlich abfahren?
– Prioritätsentscheidung (Belegungskonflikte): Welcher Zug darf zuerst auf welches Gleis?

In dem in Göttingen erarbeiteten Optimierungsmodell werden diese beiden Entscheidungen aus Sicht der Passagiere betrachtet. Das Ziel besteht darin, einen Dispositionsfahrplan zu finden, bei dem die Auswirkungen von Quellverspätungen auf die Passagiere so gering wie möglich ausfallen. Konkret ist das Ziel dabei, die durchschnittliche Verspätung der Passagiere bei Ankunft an ihren Zielbahnhöfen zu minimieren.

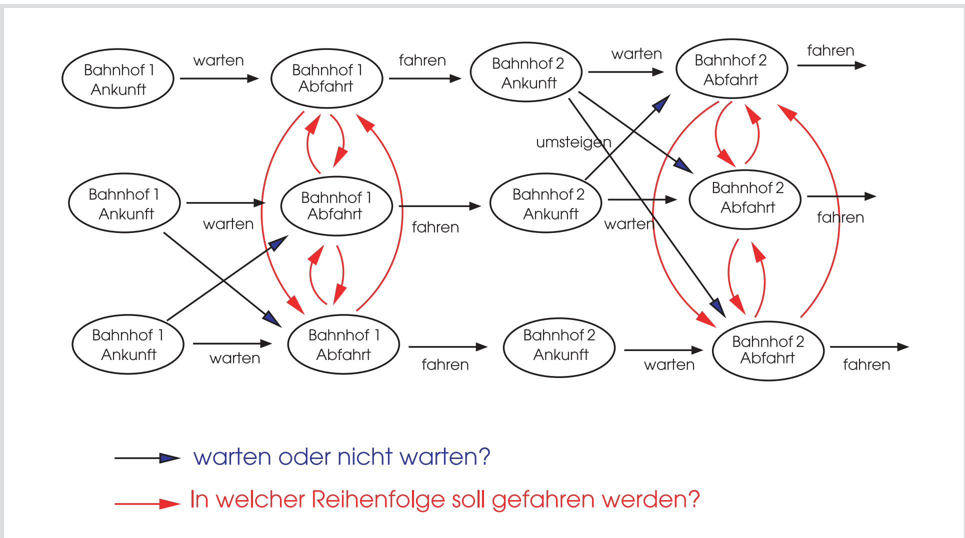


Um die wesentlichen Einflüsse von Zugverspätungen darzustellen, definiert man ein so genanntes *Ereignis-Netzwerk* (Abb. 1), in dem jede Abfahrt und jede Ankunft eines Fahrzeuges an einem Bahnhof als Knoten dargestellt wird.

Diese Ereignisse sind durch *Aktivitäten* miteinander verbunden. Sie stellen die Beziehungen zwischen den Ereignissen dar. Man unterscheidet verschiedene Typen von solchen Aktivitäten:

- ▶ *Fahraktivitäten* modellieren die Fahrt eines Zuges zwischen einer Abfahrt und einer Ankunft
- ▶ *Warteaktivitäten* modellieren die Zeit am Bahnhof, die ein Zug zwischen seiner Ankunft und seiner Abfahrt dort verbringt und
- ▶ *Umsteigeaktivitäten* modellieren das Umsteigen der Fahrgäste. Sie verbinden also die Ankunft eines Fahrzeuges an einer Haltestelle mit der Abfahrt eines anderen Fahrzeuges an der selben Haltestelle.
- ▶ Um Kapazitätsrestriktionen zu modellieren sind *Zugfolgezeit-Aktivitäten* nötig, die sicherstellen, dass der Sicherheitsabstand zwischen aufeinander folgenden Zügen eingehalten wird und dass sich auf eingleisigen Strecken keine Züge begegnen.

Abb. 1: Ein Ereignisaktivitätsnetzwerk für drei Fahrzeuge an zwei Haltestellen



Für jede Aktivität a bestimmt man ihre technisch minimale Zeitdauer L_a. Bei Fahraktivitäten ist das beispielsweise die Zeit, die ein Fahrzeug mindestens braucht, um die Entfernung zwischen den Haltestellen zurückzulegen, bei Umsteigeaktivitäten ist es die Zeit, die die Passagiere zum Umsteigen benötigen.

Um nun das Anschlusssicherungsproblem in Formeln zu packen, definiert man drei Typen von Variablen: Die Variablen x_i werden für jedes Ereignis i definiert und geben die Zeit an, in der das Ereignis im zu bestimmenden Dispositionsfahrplan stattfinden soll. Um die warten/nicht-warten Entscheidungen einzubeziehen, definiert man für jede Umsteigeaktivität a eine boolesche Variable z_a, die den Wert 0 annimmt, wenn die Umsteigeverbindung gehalten wird und den Wert 1, wenn das nicht der Fall ist. Die dritte Klasse von Variablen stellt sicher, dass die Kapazitätsrestriktionen der Gleise berücksichtigt werden. Für je zwei Abfahrtsereignisse i, j definiert man $g_{ij} = 1$ falls Ereignis i vor Ereignis j stattfinden soll, 0 sonst. Das resultierende Modell lässt sich mit diesen Variablen wie folgt aufschreiben:

minimiere $\sum_a w_a z_a + \sum_i w_i x_i$

so dass

$x_i \geq t_i$ für alle Ereignisse i

$x_j - x_i \geq L_a$ für alle Fahr- und Wartekanten $a = (i,j)$

$M z_a + x_j - x_i \geq L_a$ für alle Umsteigekanten $a = (i,j)$

$M g_{ij} + x_j - x_i \geq L_a$ für alle Zugfolgekanten $a = (i,j)$

$g_{ij} + g_{ji} = 1$ für alle Zugfolgekanten $a = (i,j)$

z_a, g_{ij} boolsch, x_i ganzzahlig

Dabei bezeichnet t_i die laut Fahrplan geplante Zeit für Ereignis i und w_i und w_a sind Angaben darüber, wie viele Passagiere Ereignis i bzw. Aktivität a benutzen möchten. Der Parameter M wird als eine Zahl gewählt, die mindestens so groß wie die größte auftretende Quellverspätung ist.

Lösungsverfahren

Für Gebiete, bis zu einer Größe, die der des Harzes entspricht, lässt sich das Problem in wenigen Minuten optimal lösen. Zum Lösen größerer Beispiele muss man Spezialverfahren entwickeln und schließlich auf Heuristiken zurückgreifen. Hier hat sich ein speziell für das Anschlusssicherungsproblem entwickeltes Verzweigungsbaumverfahren bewährt, in dem die Struktur des Problems zum Auffinden von guten Schranken ausgenutzt wird. Es ist zu bemerken, dass das Ergebnis zunächst einen Dispositionsfahrplan in einem *Makromodell* berechnet. Anschließend müssen noch weitere Details einbezogen werden, um beispielsweise sämtliche Sicherheitsrestriktionen zu gewährleisten.

Ausblick

In der Disposition bestehen nach wie vor viele aus praktischer Sicht wichtige und aus theoretischer Sicht spannende Forschungsfragen. Diese betreffen einerseits die Integration mit anderen Planungsschritten (wie etwa der Umlaufplanung oder der Gleisbelegung in Bahnhöfen), andererseits die Robustheit des Dispositionsfahrplans gegen erneute Störungen. Es wird auch daran gearbeitet, die Fahrpläne und die Linienpläne so anzulegen, dass Störungen nur wenig Auswirkungen haben und Schneeballeffekte vermieden werden.

Kooperationen und Projekte

Anschlusssicherung und Dispositionsmanagement wurden im Rahmen des Projektes DisKon (»Disposition für die beste Bahn«) der Deutschen Bahn AG in Kooperation mit der RWTH Aachen (E. Wendler) und der TU Dresden (M. Bär) untersucht. Die im Rahmen dieses Projektes begonnene Forschung wird derzeit im EU-Projekt ARRIVAL (»Algorithms for Robust and online Railway optimization: Improving the Validity and reliAbility of Large scale systems«) fortgesetzt.

Der richtige Standort: Das Bahnhofsplatzierungsproblem

Einladung zur Geburtstagsfeier! Wir feiern in Hessenau zwischen Friedland (ca. 14 km) und Heilbad Heiligenstadt (ca. 10 km). Wie so oft stellt sich die Frage: Soll ich mit dem Auto oder mit dem öffentlichen Verkehr anreisen? Es stellt sich heraus, dass die Verbindung zwischen Göttingen und Friedland und zwischen Göttingen und Heilbad Heiligenstadt sehr gut ist. Leider hält der Zug in Hessenau aber nicht, so dass sich die Fahrt wegen zehn Kilometern, die von Heiligenstadt aus mit dem Bus zurückgelegt werden müssen, drastisch verlängert. Die Entscheidung fällt also zu Gunsten des eigenen Autos ...

Solch eine Situation lässt sich häufig beobachten: Zwischen den Zentren von zwei Städten werden attraktive Bahnverbindungen angeboten, oft fehlt aber die Möglichkeit, von dort aus das endgültige Fahrtziel zu erreichen.

Bei der langfristigen Weiterentwicklung der Infrastruktur der Bahn werden solche Entscheidungen berücksichtigt. Neben den teuer zu bauenden und zu bewirtschaftenden Bahnhöfen stellt sich die Frage nach der Errichtung von einfachen Haltepunkten, die ausschließlich zum Ein- und Aussteigen in bzw. aus Regionalzügen dienen. Der Vorteil solcher Haltepunkte liegt in einem verbesserten Zugang der Kunden zur Bahn; der Minuspunkt liegt aus Fahrgastsicht in dem zeitlichen Nachteil, der durch häufigeres Anhalten der Züge entsteht. Eine interessante Fragestellung besteht darin, zu untersuchen, ob sich eine (deutliche!) Erhöhung der Anzahl der Haltepunkte im Regionalverkehr positiv auf die Nachfrage auswirkt. Um dazu zusätzliche Haltepunkte im gesamten Gebiet der Bundesrepublik Deutschland geeignet zu platzieren, wurde das folgende mathematische Modell entwickelt.

Modell

Das Einführen neuer Haltepunkte im Regionalverkehr hat für die Fahrgäste positive und negative Auswirkungen. Die positiven Auswirkungen bestehen in einem erleichterten Zugang zum Bahnverkehr. Inwieweit sich ein verbesserter Zugang positiv auf die Nachfrage auswirkt, hängt unter anderem von psychologischen Faktoren ab. Das folgende Modell betrachtet daher zwei objektivierbare Faktoren: den Abdeckungsgrad der Bevölkerung und die durch neue Halte entstehende zusätzliche Reisezeit.

Dazu sei ein Radius r (in Kilometern) gegeben. Im einfachsten Fall definiert man einen potenziellen Kunden als von der Bahn *abgedeckt,* falls seine Entfernung zum nächstgelegenen Bahnhof weniger als r Kilometer beträgt (Abb. 2). Dabei wird im Bahnverkehr üblicherweise ein Radius von zwei Kilometern angesetzt.

Das Ziel des ersten Modells besteht darin, mit möglichst wenigen (neuen) Bahnhöfen möglichst viele (neue) Kunden abzudecken. Diese beiden Wünsche, die Anzahl der abgedeckten Kunden zu maximieren und die Anzahl der zu errichtenden Haltestellen zu minimieren, widersprechen sich: Will man viele Kunden erreichen, so wird es nötig sein, auch viele Bahnhöfe zu errichten. Möchte man andererseits Kosten sparen und wenige Bahnhöfe bauen, so werden auch nur wenige neue Kunden erreicht. Man kann nun entweder ein Budget vorgeben und die neuen Bahnhöfe so verteilen, dass man möglichst viele Kunden erreicht, oder man gibt einen Abdeckungsgrad vor und versucht diesen mit möglichst wenigen zusätzlichen Bahnhöfen zu realisieren.

Eine andere Schwierigkeit bei der Modellierung liegt darin, dass man a priori die neuen Haltestellen überall entlang der bestehenden Gleise errichten darf. Um zu einer endlichen Kandidatenmenge zu kommen, fasst man die potenziellen Standorte, von denen aus man die selben Kunden erreichen kann, zu Intervallen zusammen. Man kann dann beweisen, dass es reicht, einen repräsentativen Punkt s aus jedem Intervall zu betrachten. Sei S die Menge dieser repräsentativen Punkte. Für jeden solchen Punkt s aus S und

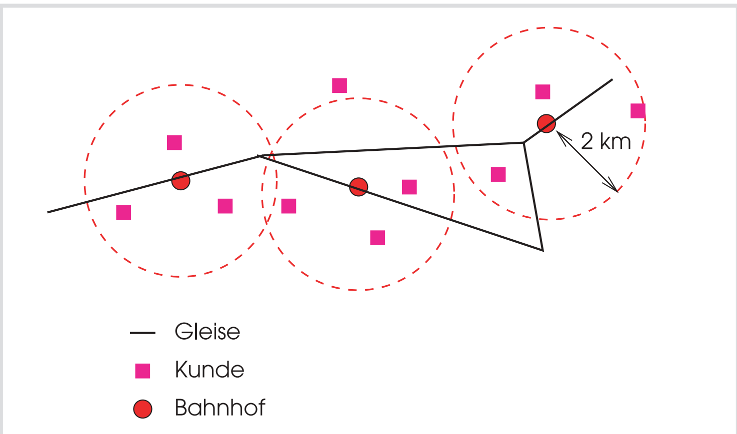


Abb. 2: Ein Ereignisaktivitätsnetzwerk für drei Fahrzeuge an zwei Haltestellen

jeden Kunden i setzt man a_{is} auf 1, falls der Punkt s dichter als r an i liegt; anderenfalls setzt man $a_{is}=0$. Mithilfe dieser Daten kann man nun das Problem folgendermaßen modellieren: Man definiert dazu zwei Klassen von booleschen Entscheidungsvariablen: Einmal benötigt man Variablen x_s, die den Wert eins annehmen, wenn der Punkt s als Haltestelle eingerichtet wird, 0 sonst. Weiterhin benötigt man Variablen y_i, die auf 1 gesetzt werden, wenn Kunde i abgedeckt ist, 0 sonst. Das resultierende Modell ergibt sich dann als:

$$\text{minimiere} \quad \sum_s w_s x_s$$

$$\text{maximiere} \quad \sum_i w_i y_i$$

$$\text{sodass} \quad \sum_s a_{is} x_s \geq y_i \text{ für alle Kunden } i$$

$$x_s, y_i \text{ boolsch}$$

In einem erweiterten Modell kann die Entwicklung der Tür-zu-Tür-Reisezeit der Kunden in Abhängigkeit der neu einzurichtenden Haltestellen optimiert werden. Dieser Ansatz berücksichtigt sowohl die von der Haustür bis zum Bahnhof benötigte Zeit wie auch die durch die zusätzlichen Halte verlorene Fahrzeit (»Stop-and-Go«) auf der Strecke. Um die Reisezeit bis zum Bahnhof zu bestimmen, wurde zunächst der nächste Bahnhof für einen Kunden, der in i wohnt und zu seinem Ziel in j reisen will, bestimmt. Je nach Entfernung wurde dann angenommen, dass der Kunde zu Fuß, per Fahrrad/Bus oder mit dem Auto zu dem Bahnhof kommt, und daraus die Reisezeit bis zum Bahnhof geschätzt.

Lösungsverfahren

Das erste Modell lässt sich entlang einer einzigen Linie effizient durch kürzeste Wege-Verfahren lösen, ist für beliebige Netze aber sehr schwierig. Für dieses Problem und für die Minimierung der Tür-zu-Tür-Reisezeit wurden neben exakten Verfahren daher auch Heuristiken entwickelt. Im Rahmen eines Projektes mit der DB AG kam ein »genetisches« Verfahren zum Einsatz. Das Ergebnis ergab eine Verbesserung der Tür-zu-Tür-Reisezeit, wenn man die neuen Haltestellen geschickt platzierte.

Ausblick

Im Rahmen der praktischen Implementierung des Ansatzes wurde auch eine Variante entwickelt, bei der verschiedene Abdeckungsradien mit unterschiedlichen (psychologischen) Effekten betrachtet werden können. Weiterhin wurde die bisher verwendete Vereinfachung, dass die Kunden als punktförmig angenommen wurden, relaxiert. Anstatt Siedlungsflächen als Punkte zu repräsentieren, wurden erste Ansätze entwickelt, die erlauben, sie als echte Flächen zu behandeln. Weitere Forschungsthemen sind die Entwicklung weiterer Heuristiken für das bikriterielle Problem sowie die Integration mit der Linienplanung.

Kooperationen und Anwendung

Das Problem der Haltestellenplatzierung wurde in Zusammenarbeit mit H.W. Hamacher, A. Liebers, M. Schröder, D. Wagner und F. Geraets im Rahmen einer Kooperation mit der Deutschen Bahn AG, der Technischen Universität Kaiserslautern, der Universität Karlsruhe und dem Fraunhofer Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik untersucht.

Gerechte Fahrpreise: Wabenplanung im ÖPNV

Geschafft – der Zug ist pünktlich in Stuttgart angekommen! Weiter geht es mit der Stadtbahn U6 bis nach Degerloch und anschließend mit Bus 74 bis zum vereinbarten Treffen an der Universität Hohenheim. Die Haltestelle der Stadtbahn ist schnell gefunden, jetzt fehlt nur noch die Fahrkarte aus dem Automaten. Erfreulicherweise ist es möglich, direkt eine Fahrkarte für zwei Zonen zu lösen, die für die gesamte Fahrt mit Stadtbahn und Bus gültig ist.

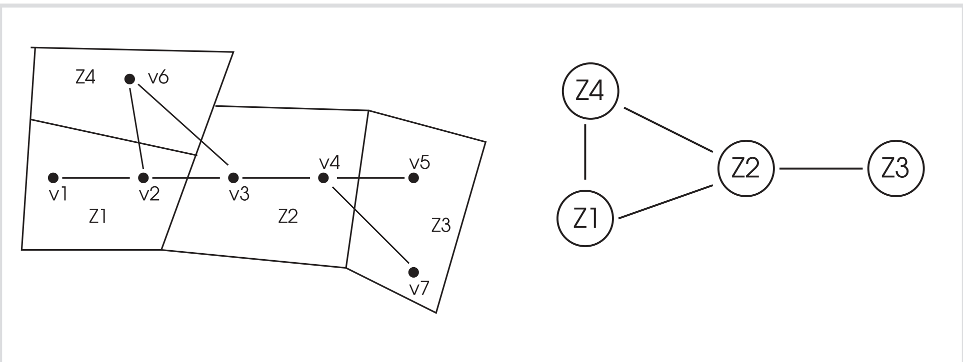
In Zeiten erhöhter Mobilitätsansprüche versuchen sich auch die Anbieter von öffentlichem Personennahverkehr miteinander zu vernetzen. So entstehen insbesondere in Deutschland immer mehr Verkehrsverbünde, die sich als Ziele unter anderem abgestimmte Fahrpläne und attraktive Fahrpreise auf die Fahnen schreiben. Um das Umsteigen wie in obigem Beispiel in Stuttgart zu erleichtern, soll ein Tarifsystem angeboten werden, in dem die Fahrgäste mit nur einer Fahrkarte mehrere Verkehrsunternehmen nutzen dürfen. Neben der Tarifergiebigkeit soll dabei auch der Wunsch der Fahrgäste nach einem fairen und nachvollziehbaren Tarifsystem berücksichtigt werden.

Die bekanntesten Tarifsysteme sind die folgenden:

- Der *Entfernungstarif,* bei dem sich der Fahrpreis an der zurückgelegten Entfernung orientiert. Dieser gilt als fair, ist aber unübersichtlich.
- Dagegen kosten bei einem *Einheitstarif* alle Fahrten gleich viel. Das ist sehr übersichtlich, aber leider nicht sonderlich fair.
- Als Mittelweg bieten die meisten Verkehrsverbünde so genannte *Waben-* oder *Zonentarife* an. Bei einem solchen Tarifsystem wird das gesamte Verbundgebiet in Waben (oder Zonen) eingeteilt. Der Fahrpreis hängt ausschließlich von der Anzahl der befahrenen Waben ab und ist insbesondere unabhängig von den benutzten Verkehrsunternehmen. Der Fahrgast kann selbst zählen, durch wie viele Waben er fährt und damit seinen Fahrpreis leicht nachvollziehen. Zusätzlich kann man Wabentarife durch geschickte Wahl der Waben sehr flexibel gestalten.

Die Einführung eines Wabentarifes ist allerdings nicht einfach. Das Tarifgebiet muss in Waben eingeteilt werden und es müssen die Preise für das Durchfahren von einer, zwei, drei, ... Waben definiert werden. Die Verkehrsunternehmen möchten dabei keine Einbußen bei ihren Fahrgeldeinnahmen hinnehmen, den Kunden andererseits aber auch keine großen Preiserhöhungen zumuten. Dabei sind die Auswirkungen der räumlichen Einteilung der Waben unübersichtlich: Die Verschiebung einer einzelnen Haltestelle von einer Wabe in ihre Nachbarwabe kann große Auswirkungen auf die Fahrgeldeinnahmen haben, da so eine Verschiebung nicht nur die ein- und aussteigenden Fahrgäste betrifft, sondern auch solche, die die Haltestelle nur passieren.

Abb. 3: Ein Verkehrsnetz mit vier Waben und der zugehörige Wabengraph



Modell

Wir setzen voraus, dass das bestehende Verkehrsnetzwerk bekannt ist und beschreiben es durch einen Graphen G=(V,E), in dem V die Menge aller Haltestellen ist und eine Kante {i,j} zwischen zwei Haltestellen i und j besteht, wenn die Haltestellen entlang einer Bus- bezeihungsweise einer Bahnlinie direkt benachbart sind.

Ein Wabentarif wird durch seine Waben und die Preise c(n) für das Befahren von n = 1, 2, 3, ...

Waben definiert. Wir partitionieren also die Menge der Haltestellen in Teilmengen, die den Waben entsprechen. Daraus definiert man ein neues Netzwerk, der so genannte *Wabengraph* (siehe Abb. 3):

- Jede Wabe wird als Knoten aufgefasst.
- Zwei dieser Wabenknoten sind durch eine Kante verbunden, wenn man direkt von der einen Wabe in die andere fahren kann.

Die Fahrpreise im zukünftigen Wabensystem können nun durch *Kürzeste-Wege-Verfahren* in diesem Wabengraphen effizient bestimmt werden.

Um einen Wabentarif zu beurteilen, betrachtet man die absoluten Abweichungen zwischen den neuen Fahrpreisen und den bisher bestehenden (oder gewünschten) Preisen der beteiligten Verkehrsunternehmen für jede einzelne Fahrt durch das Tarifgebiet. Die sich ergebenden Histogramme erlauben eine fundierte Beurteilung der Qualität des Wabensystems. Als einfache Kennzahlen können die durchschnittliche absolute Abweichung oder die maximale absolute Abweichung herangezogen werden. Bei diesen Kennzahlen sollten Abweichungen nach oben und nach unten gleich behandelt werden, sodass das Modell die Interessen der Verkehrsunternehmen und der Fahrgäste gleichermaßen wiedergibt.

Lösungsverfahren

Das Problem, eine optimale Wabeneinteilung zu finden, gehört auch zu den besonders schwierigen Optimierungsproblemen, sodass mit einem effizienten exakten Verfahren derzeit nicht zu rechnen ist. Sind die Waben aber schon vorgegeben (etwa aus politischen Gründen), so ist das Teilproblem, bei gegebenen Waben die optimalen Preise für das Durchfahren von eins, zwei, drei ... Waben zu finden, sehr leicht lösbar. Für dieses Problem kön-

Interdisziplinäre Lehre: Neue Projekte in der Mathematik

(red.) In Forschung und Anwendung wird immer deutlicher, dass Mathematiker keineswegs nur im stillen Kämmerlein sitzen, sondern zusammen mit anderen Fachgebieten an gemeinsamen Projekten forschen. Prof. Anita Schöbel zeigt in verschiedenen Projekten, wie man interdisziplinäre Zusammenarbeit auch in der Lehre fördern kann.

Im Rahmen des Projektes PILZ »Pilotprojekt Interdisziplinäres Lernen und Zusammenarbeit« an der Universität Göttingen wird in jedem Semester ein aktuelles Thema auf der Schnittstelle zwischen Mathematik und einem anderen Fach beleuchtet. Dazu sind die Studierenden aller Fakultäten, die sich für das Thema interessieren, eingeladen. In einem einwöchigen Kompaktkurs werden zunächst die nötigen Kenntnisse vermittelt, anschließend arbeiten die Studierenden in kleinen interdisziplinären Gruppen an praktischen Projekten auf dem entsprechenden Gebiet. Die ersten beiden PILZ-Kurse beschäftigten sich mit Netzwerken in der Bioinformatik (unter Beteiligung der Arbeitsgruppen von Prof. Schöbel, Prof. Waack und Prof. Wingender) und mit Themen aus der Logistik (Prof. Schöbel und Prof. Geldermann). Weitere Kurse für die kommenden Semester sind in Zusammenarbeit mit den Forstwissenschaften und der Physik geplant.

Auch in der mathematischen Ausbildung für Nicht-Mathematiker werden neue Wege beschritten: Zusätzliche Tutorien in den mathematischen Veranstaltungen für die Informatik, die Biologie und die Geowissenschaften vermitteln den Studierenden die mathematische Arbeitsweise und helfen beim Verständnis des Stoffes. Weiterhin sollen die Vorlesungsinhalte stärker aus dem jeweiligen Fach motiviert und mit entsprechenden Beispielen versehen werden. Ein »Sammelsurium« spannender Problemstellungen auf der Schnittstelle zwischen Biologie und Mathematik wurde im Rahmen eines Seminars erarbeitet. Es verdeutlicht die Bandbreite mathematischer Anwendungen in der Biologie.

Eine weitere Neuerung fand im Wintersemester 2008/09 statt: Um Biologiestudierenden und Studierenden der Geowissenschaften den Einstieg in die Mathematik zu erleichtern, wurde für sie erstmalig ein mathematisches Propädeutikum angeboten. Eine Woche lang wurden Vorlesungen zum Auffrischen der Schulkenntnisse gehalten und der vermittelte Stoff anschließend in Gruppenarbeit geübt. Einzelne Fachvorträge rundeten das Programm ab.

nen Formeln angegeben werden, mit denen diese Wabenpreise bestimmt werden können. Aus diesem Ergebnis lassen sich außerdem untere Schranken für eine optimale Wabeneinteilung ableiten.

Um in annehmbarer Rechenzeit eine möglichst gute Wabeneinteilung zu bestimmen, muss man auf heuristische Ansätze zurückgreifen. Dabei kann man Algorithmen aus der Clustering-Theorie einsetzen, bei denen man im ersten Schritt mit so vielen Waben startet, wie es Haltestellen gibt. In den folgenden Schritten werden nach bestimmten Kriterien jeweils zwei Waben zusammengefasst, bis schließlich die gewünschte Wabenanzahl erreicht ist. Im Gegensatz dazu ist es auch möglich, zunächst einen spannenden Baum maximalen Gewichtes zu bestimmen und aus diesem so viele Kanten zu entfernen, bis die Anzahl der entstehenden Zusammenhangskomponenten der gewünschten Wabenanzahl entspricht. Die erstgenannte Klasse führt bei einem Greedy-Kriterium, bei dem jeweils die Waben zusammengefasst werden, die die kleinste Verschlechterung der Zielfunktion erzielen, in der Regel zu besseren Lösungen.

Ausblick

In der Praxis muss das bisher behandelte Wabenproblem durch weitere Restriktionen ergänzt werden. Hierunter fallen Bedingungen an die Preistabelle, politische Restriktionen in der Wabeneinteilung und Sonderregelungen wie beispielsweise leere Waben, so genannte *Zählwaben*, Haltestellen, die zu mehreren Waben gehören (so genannte *Überlappungsbereiche*), Kurzstreckentarife, Sonderpreisstufen oder Großwaben. Während das Einbeziehen solcher Nebenbedingungen in der Theorie kaum untersucht ist, wurde zur Planung und Evaluierung von Wabentarifen eine Software entwickelt, die in der Praxis bereits mehrmals erfolgreich eingesetzt wurde.

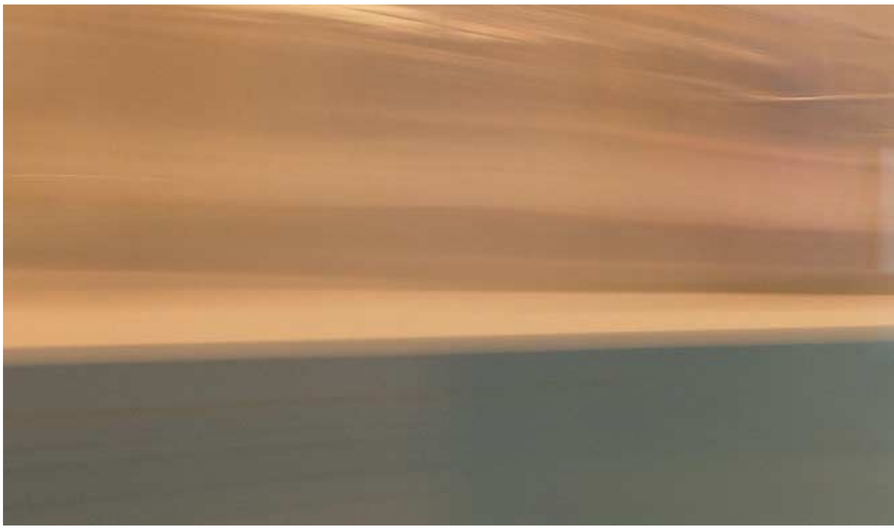
Kooperationen und Anwendungen

Die Theorie zur Tarifplanung entstand zusammen mit H.W. Hamacher, TU Kaiserslautern. Die Entwicklung der entsprechenden Software geht auf G. Schöbel zurück. Angewendet wurden die Ergebnisse bei der Tarifplanung verschiedener Verkehrsunternehmen und Verkehrsverbünde (zum Beispiel bei der Neuplanung des Tarifsystems im Saarland).

Zusammenfassung

Die diskrete Optimierung ist ein Teilgebiet auf der Schnittstelle von Mathematik und Operations Research, auf dem in den letzten Jahren immense Fortschritte in der Entwicklung und Anwendung von Algorithmen gemacht wurden. Anhand der Beispiele Anschlusssicherung, Haltestellenplanung und Tarifplanung wurde aufgezeigt, wie Methoden der diskreten Optimierung helfen können, den öffentlichen Verkehr mit gleich bleibendem Budget für die Fahrgäste zu verbessern. Die drei vorgestellten Beispiele beziehen sich auf Projekte, die in Kooperation mit Verkehrsunternehmen ausgeführt wurden.

Prof. Dr. Anita Schöbel, Jahrgang 1969, studierte von 1988 bis 1993 Mathematik und Wirtschaftswissenschaften an der Technischen Universität Kaiserslautern. Nach ihrer Promotion 1998 leitete sie den Schwerpunktbereich Verkehr im Fraunhofer Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik (ITWM) Kaiserslautern. Als wissenschaftliche Assistentin kehrte sie 2000 wieder an die Universität zurück und habilitierte sich 2003 im Fach Mathematik. Im Jahr 2004 nahm sie den Ruf an das Institut für Numerische und Angewandte Mathematik an der Universität Göttingen an, dessen Direktorin sie derzeit ist. Im Jahr 2006 erhielt sie Rufe nach Wuppertal und Trier, die sie aber zugunsten der Georg-August-Universität ablehnte. Prof. Schöbel ist eingebunden in das Graduiertenkolleg »Identifikation in mathematischen Modellen« und Projektleiterin in dem EU-Projekt ARRIVAL. Sie unterhält weitere Forschungskooperationen, zum Beispiel mit der Deutschen Bahn. Neben ihrer Forschung in angewandter Mathematik gilt ihr Interesse auch der interdisziplinären Zusammenarbeit in Forschung und Lehre.



Delay management, stop location, and tariff planning – these are three examples of areas in which modern methods of mathematical optimization can help to improve the attractiveness of public transportation.

The first example, delay management, deals with the decision of whether a connecting train should wait for a delayed feeder train or whether it is better for it to depart on time. If the train departs on time, passengers who want to change miss their connection. On the other hand, if the train waits, it may carry over its delay to other trains in the network and hence delay other passengers. In our model we aim to minimize the sum of all delays of all passengers. In order to formulate the problem in mathematical terms, the crucial question »to wait or not to wait« is modelled by binary decision variables. The constraints are formulated by linear inequalities such that a so-called linear integer program is obtained. Our delay management model has been developed in a project together with Deutsche Bahn and is being further refined within the EU project ARRIVAL. Although due to the complexity and size of railway networks the resulting optimization task is hard to solve, we are able to obtain solutions for real-world delay management instances in reasonable time.

In the second example we deal with the location of stops along a railway network. By a stop we mean not a fully equipped main station but just a place where regional trains can stop and allow passengers to board or leave the train. In this example, we again consider the problem from a customer-oriented point of view. Having a stop close to your home increases the attractiveness of public transportation. On the other hand, a train stopping every 500 meters is slow and not really attractive. In order to combine these two effects we considered the additional (or saved) travelling time of all passengers as an objective function. In a project with *Deutsche Bahn* we discussed the question of whether travelling time can be saved by opening many new stops all over Germany. In order to tackle this question we developed different mathematical models and finally solved the travelling time model using a genetic algorithm. Our results show that the average travelling time can indeed be reduced if the locations of the new stops are judiciously chosen.

The ticket prices for the passengers are the subject of the third example. There are various possibilities for tariff systems: In a distance tariff, the ticket prices are proportional to the distance travelled; in a unit tariff all trips cost the same. The distance tariff is generally considered to be fair but is difficult to handle, while the unit tariff is a very easy but unjust tariff system. A model in between is the so-called zone tariff system. Here the tariff region is partitioned into zones and the ticket prices are dependent only on the number of zones within a journey. The main application of zone tariff systems is when different public transportation companies form a common traffic association in which they want to offer one common tariff system for their customers. When designing a zone tariff system the shape and the size of the zones is very important. Constructing fair tariff zones that meet the requirements of the public transportation companies is hence the problem we are dealing with. Using methods of clustering theory we were able to develop algorithms and software for the design and evaluation of tariff zones. It has been applied e.g. for the traffic association in Saarland, Germany.

Mathematik-Olympiade: Früh übt sich ...

... wer ein guter Mathematiker werden will

Foto: Philipp Schmale

(red.) Regelmäßig an einem Wochenende im Februar bevölkern Schülerinnen und Schüler das Mathematische Institut der Georg-August-Universität Göttingen. Seit 2001 findet hier die Niedersächsische Landesrunde der Mathematik-Olympiade statt, die Schülern die Möglichkeit bietet, ihre besondere Leistungsfähigkeit auf mathematischem Gebiet unter Beweis zu stellen.

Vierstufig aufgebaut (Schulrunde, Regionalrunde, Landes- und Bundesrunde) und mit individuellen Aufgaben für fast jede Klassenstufe ab Klasse 3/4, erzielt die Mathematik-Olympiade eine große Breitenwirkung. Der ursprünglich aus der DDR stammende Wettbewerb steht heute unter der Schirmherrschaft des Bundespräsidenten. 200.000 Teilnehmer bundesweit zählt die Mathe-Olympiade derzeit jährlich, Tendenz steigend, davon in Niedersachsen rund 17.000. Für die Niedersächsische Landesrunde werden von den Gymnasien schließlich noch knapp 200 Jungen und Mädchen zugelassen. Diese mathematischen Jungtalente sind als zukünftige Studierende für die Universität Göttingen eine interessante Gruppe. Die aufwändige Organisation aller Stufen der Niedersächsischen Mathe-Olympiade liegt in den Händen eines Organisationsteams von rund 15 Göttinger Studierenden und Doktoranden der Mathematik und Physik.

Die Landesrunde besteht aus zwei vierstündigen Klausuren. Vor und hinter den Kulissen kümmern sich rund 130 Helfer um die Schüler, die den Tag im Institut und die Nacht in der Jugendherberge verbringen. Neben dem Wettbewerbsgedanken sollen Spiel und Spaß nicht zu kurz kommen; es gibt Knobelangebote, mathematische Vorträge und Führungen. Die vielen Helfer sorgen vor allem für die zügige Korrektur der Klausuren innerhalb nur weniger Stunden. Höhepunkt des zweitägigen Programms ist die Siegerehrung in der Aula der Universität. In einem feierlichen Rahmen und mit Gastrednern und Musikbeiträgen werden Urkunden und Preise überreicht. Außerdem wird aus den Besten der Landesrunde die niedersächsische Bundesrundenmannschaft zusammengestellt.

Bereits mehrere niedersächsische Landessieger kamen aus Göttingen. Karen Habermann vom Felix-Klein-Gymnasium errang 2008 sogar einen ersten Preis bei der Bundesrunde und zeigte den Erfolg der Niedersächsischen Mathematik-Olympiade nicht nur in der Fläche, sondern auch in der Spitze. Im Jahr 2010 wird das Göttinger Organisationsteam der Mathe-Olympiade erstmals auch die Bundesrunde des Wettbewerbs ausrichten und damit die mathematischen Talente der Bundesrepublik im Mathematischen Institut zu Gast haben. Für dieses Ereignis fehlen zurzeit noch Sponsoren und Mitstreiter, die sich unter mo@math.uni-goettingen.de melden können.

Die Mathematik-Olympiade ist nur eines von mehreren Angeboten in Sachen mathematischer Schülerförderung an der Georg-August-Universität: Der Mathematische Korrespondenzzirkel ist eine mathematische Arbeitsgemeinschaft per Briefwechsel. Alle sechs Wochen werden vier kurzweilige bis anspruchsvolle Aufgaben gestellt, die für Schüler von Klasse 8 bis zum Abitur gedacht sind. Sie können ihre Lösungen und Lösungsansätze einsenden und das Team des Korrespondenzzirkels – derzeit acht Studenten und Doktoranden – korrigiert und kommentiert die Einsendungen und erstellt ausführliche Beispiellösungen. So können Schüler, ohne räumlich gebunden zu sein, mathematische Herausforderungen außerhalb des Schulunterrichts angehen.(www.math.uni-goettingen.de/zirkel/).

Im Herbst fast jeden Jahres gibt es außerdem das Göttinger Mathecamp, zu dem sich vierzig mathematikbegeisterte Schüler aus dem ganzen Bundesgebiet treffen. Sie besuchen eine Woche lang Vorlesungen und Übungen zu einem jährlich wechselnden Thema. Jeweils abends wird über die »Forschungsergebnisse« untereinander berichtet – aber auch der Spaß kommt nicht zu kurz. So wird traditionell eine große Leonardo-Brücke gebaut – eine selbsttragende Konstruktion aus Latten ohne Nägel und Schrauben. Den Abschluss des Camps bildet ein mathematischer Wettstreit mit Knobelaufgaben.

Weitere Angebote sind eine AG für Göttinger Schüler sowie ein dreiwöchiges Propädeutikum im September, das Studienanfängern in lockerer Form bereits wichtige Grundlagen der Universitätsmathematik näherbringt. Und schließlich haben sich Mitglieder der Göttinger Mathematischen Fakultät mehrfach an der Göttinger Kinder-Uni mit altersgerechten Mathematik-Vorlesungen und -Seminaren beteiligt.

Die Preisträger der Niedersächsischen Landesrunde 2008, darunter Karen Habermann (2. R., rechts), die beim anschließenden Bundeswettbewerb einen ersten Preis errang. Foto: Werner Fricke

Mathematische Methoden in Medizin und Technik

Inverse Probleme und Tomographie

Rainer Kreß

Minendetektoren und Impedanztomographie

Etwa 100 Millionen zumeist oberflächennah vergrabene Landminen gefährden als Hinterlassenschaften bewaffneter Konflikte in vielen Ländern die Bevölkerung. Ihre rasche und vollständige Beseitigung ist eine große Herausforderung. Eines der am häufigsten zum Minenräumen eingesetzten Geräte ist gegenwärtig der Metalldetektor. Diese Geräteklasse weist jedoch, bedingt durch allgegenwärtig im Boden befindliche Metallteile, eine hohe Fehlalarmrate auf. Auf Anregung des Auswärtigen Amtes wurde ab 2004 zur Erbringung eines relevanten deutschen Beitrags zur Technologie der Minendetektion vom Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) über drei Jahre ein Projektverbund *Metalldetektoren für Humanitäres Minenräumen* gefördert. Zwölf Institute aus den Bereichen Mathematik, Elektrotechnik, Geophysik und zerstörungsfreie Materialprüfverfahren sollten prüfen, ob die hohen Fehlalarmraten beim Einsatz von tragbaren Metalldetektoren konventioneller Bauart durch nachgeschaltete mathematische Methoden reduziert werden können. Zu den beteiligten Forschungseinrichtungen gehörte auch das Institut für Numerische und Angewandte Mathematik an der Universität Göttingen.

Um zu erfahren, warum Mathematik die Fehlerrate bei Metalldetektoren reduzieren kann, muss man zuerst die Funktionsweise der Geräte kennen. Der über den Boden geführte Metalldetektor sendet eine elektromagnetische Welle aus, die von im Boden befindlichen Metallteilen gestreut wird (vgl. Abb. 1). Die gestreute sekundäre Welle induziert in einer Empfängerspule im Detektor eine elektrische Spannung. Falls letztere als Folge von vorhandenen Metallteilen einen Schwellwert überschreitet, gibt der Detektor ein akustisches Signal. Durch eine Messung und Aufzeichnung

des Verlaufs dieser Spannung während der Bewegung über den Boden lässt sich jedoch die Minendetektion quantitativ als ein inverses Problem für elektromagnetische Felder interpretieren: Aus dem gemessenen Spannungsverlauf sollen geometrische Parameter zu Form, Größe und Position des entdeckten metallischen Objekts ermittelt werden. Weiter unten werden Göttinger Forschungsergebnisse vorgestellt, die das Potenzial von mathematischen Methoden der Streutheorie zur Reduzierung von Fehlalarmquoten bei der Minendetektion bestätigen.

Die elektrische Impedanztomographie als unser zweites Beispiel ist ein neues nichtinvasives Bildgebungsverfahren in der Medizin und Technik. Es basiert auf einer Visualisierung ortsabhängiger elektrischer Leitfähigkeiten. Der elektrische Widerstand als Reziprokes der Leitfähigkeit wird auch Impedanz

Mit MInendetektoren identifizierte
Landminen in Mexiko

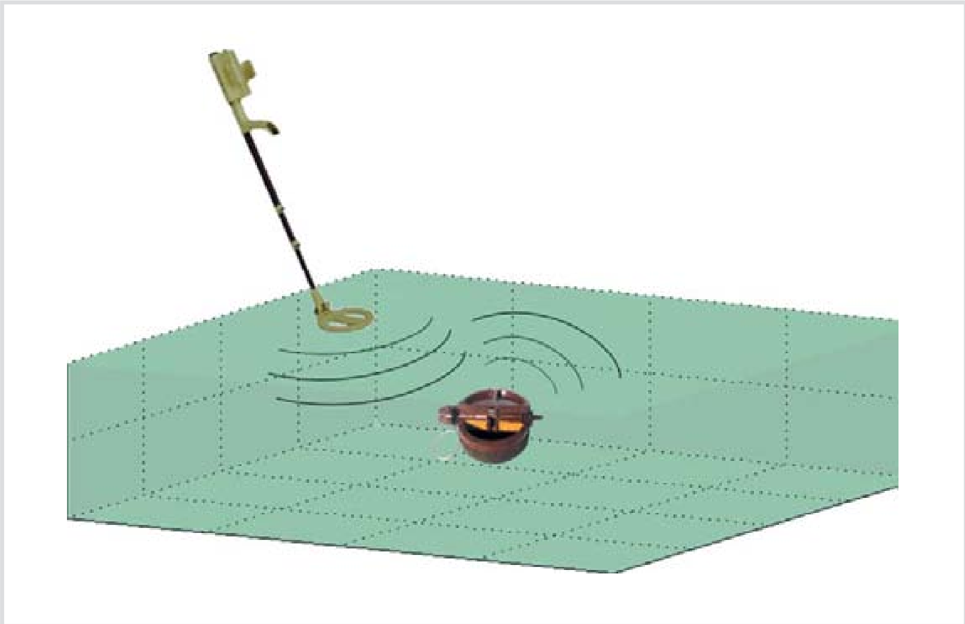
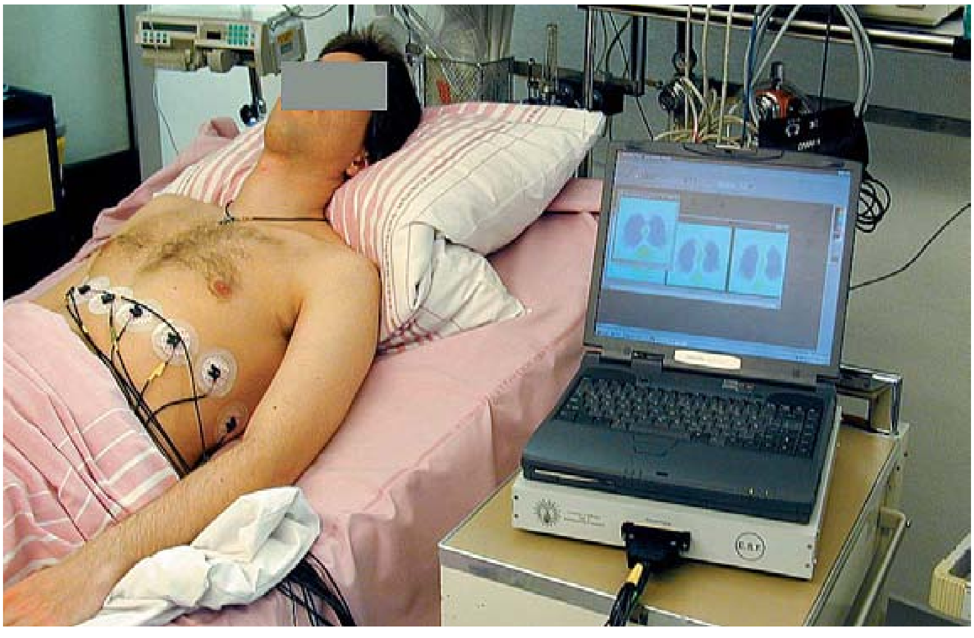


Abb. 1:
Schematische Darstellung der Funktionsweise eines handgehaltenen Metalldetektors
Abbildung: Verfasser

genannt, und dies erklärt den ersten Teil der Namensgebung. (Der zweite Teil der Namensgebung wird weiter unten erläutert werden.) In der Medizin wird die Impedanztomographie eingesetzt, um beispielsweise Querschnittbilder des menschlichen Thorax zur Überwachung der Lungenfunktion zu erhalten. Dabei nutzt das Verfahren die unterschiedlichen Leitfähigkeiten der Lunge im beatmeten und unbeatmeten Zustand und des umgebenden Körpergewebes (vgl. Abb. 2) aus.

Nach demselben Prinzip funktionieren technische Anwendungen beispielsweise bei der Überwachung der Verteilung von Öl und Wasser in Pipelines und der Strömung von verschiedenen Substanzen in Mischkesseln in der chemischen Industrie. In der Denkmalpflege lassen sich mit Impedanztomographie Bruchstellen in Gebäudeteilen aufspüren, und sogar in der Forstwirtschaft kann Impedanztomographie als Instrument zur Qualitätsüberprüfung von Bäumen eingesetzt werden.

Abb. 2:
Impedanztomographie des Brustkorbs eines Patienten des Universitätsklinikums Göttingen
Abbildung:Verfasser



Im Vergleich mit der weiter unten betrachteten Röntgentomographie ist die Impedanztomographie um Größenordnungen billiger und vermeidet die gesundheitlichen Gefahren durch Röntgenstrahlen. Nachteil des Verfahrens ist die vergleichsweise niedrige räumliche Bildauflösung (vgl. Abb. 3).

Zur Bestimmung der Leitfähigkeitsverteilung in einem elektrisch leitfähigen Objekt werden an auf dem Rand angebrachten Elektroden niederfrequente Ströme eingeprägt. Die von diesen Strömen hervorgerufenen Spannungen zwischen den Elektroden sind abhängig von der Leitfähigkeitsverteilung im Innern des Objekts. Die Ermittlung dieser Verteilung aus den eingeprägten Strommustern und den dazu gehörenden gemessenen Spannungen stellt ein inverses Problem aus der Elektromagnetik dar.

Unter einem Schwerpunkt Mathematik für Innovationen in Industrie- und Dienstleistungen fördert das BMBF seit Beginn dieses Jahres einen Projektverbund »Regularisierungsverfahren für die elektrische Impedanztomographie in Medizin und Geowissenschaften«. Dieser Verbund besteht aus sechs Instituten aus den Bereichen Mathematik, Physik und Medizin und hat unter anderem als Ziel, die mathematischen Verfahren der Impedanztomographie im Hinblick auf ihre praktische Einsatzfähigkeit in der medizinischen Anwendung weiterzuentwickeln. Von der Universität Göttingen sind an diesem Verbund aus der Mathematik das Institut für Numerische und Angewandte Mathematik und aus der Medizin die Abteilung Anaesthesiologische Forschung am Zentrum für Anaesthesiologie beteiligt. Ein Teil der Göttinger mathematischen Forschungsansätze zu einem effizienten Rekonstruktionsverfahren bei Leitfähigkeitsverteilungen mit starken Kontrasten wird weiter unten dargestellt werden.

Die Göttinger Beiträge in den beiden Projektverbünden zur Minendetektion und zur Impedanztomographie stehen in enger thematischer Verbindung mit einer Forschernachwuchsgruppe »Neue numerische Verfahren zur Lösung inverser Probleme«, die im Jahre 2002 vom Land Niedersachsen auf Antrag des Verfassers am Institut für Numerische und Angewandte Mathematik eingerichtet wurde und unter Leitung von Professor Roland Potthast über fünf Jahre erfolgreich gearbeitet hat. Bevor diese Arbeiten etwas genauer beschrieben werden und allgemein verdeutlicht wird, warum und wie Mathematik von Nutzen in der Minendetektion und der Impedanztomographie ist, soll zunächst geklärt werden, warum diese Aufgaben zu der Klasse der inversen Probleme zählen.

Inverse Probleme

In der Mathematik werden zwei Probleme zueinander invers genannt, wenn die Formulierung des ersten Problems teilweise oder vollständig die Lösung des zweiten Problems enthält und umgekehrt. Multiplikation und Division sind zueinander invers: die Multiplikationsaufgabe 4 x 5 enthält in der Formulierung das Ergebnis 5 der Divisionsaufgabe 20 : 4, und umgekehrt enthält die Formulierung der Division das Ergebnis 20 der Multiplikation. Nach dieser Definition erscheint es zunächst willkürlich, nur eines der beiden Probleme als inverses Problem zu bezeichnen. Häufig ist jedoch eines der beiden Probleme einfacher zu behandeln und intensiver untersucht, während das zweite Problem schwieriger und in der mathematischen Literatur noch nicht so ausführlich behandelt ist. Dann wird das erste das direkte und das zweite das inverse Problem genannt.

Inverse Probleme treten in vielfältiger Weise bei der mathematischen Modellierung von nichtinvasiven Evaluierungs- und Bildgebungsverfahren in Naturwissenschaften, Medizin und Technik auf. Vereinfacht gesprochen ist hier bei den entsprechenden direkten Problemen die Ursache bekannt, und es wird nach der Wirkung gefragt, während umgekehrt bei den zugeordneten inversen Problemen aus der Wirkung auf die Ursache zurückgeschlossen werden soll. Ein typisches Beispiel bildet die inverse Streutheorie für akustische, elektromagnetische und elastische Wellen.

Allgemein befasst sich die Streutheorie mit den Auswirkungen von Objekten auf die Ausbreitung von Wellen. Bei einem direkten Streuproblem sind die ungestört einfallende Welle und das streuende Objekt bekannt, und gefragt ist nach der resultierenden gestreuten Welle. Beim zugehörenden inversen Streuproblem sollen aus Messungen der gestreuten Welle an geeigneten Detektoren geometrische und physikalische Parameter des streuenden Objekts ermittelt werden. Zur Veranschaulichung kann an Wasserwellen gedacht werden. Die auf einem See durch Einwerfen eines Gegenstandes erzeugten Wellen hängen von der Gestalt des eingeworfenen Körpers ab. Am Seeufer soll aus der Form der am Ufer eintreffenden Wasserwellen erschlossen werden, ob in der Seemitte ein kugelförmiger Stein, ein langer zylindrischer Stock oder irgendein anderes Objekt ins Wasser geworfen wurde.

Anwendungen findet die inverse Streutheorie in der medizinischen Diagnostik (Ultraschalltomographie), der zerstörungsfreien Materialprüfung (zum Beispiel bei der Erkennung von defekten ICE-Radreifen und -Achsen), der seismischen Erdöl- und Mineralexploration, bei Radar usw. Dabei werden vereinfacht gesagt die Unterschiede in der Streuung von Schallwellen an gesundem oder krankem Körpergewebe ausgenutzt oder von elastischen Wellen an Metallkörpern mit oder ohne Defekt oder an Erdschichten mit oder ohne Öl- oder Erzeinschlüssen Man nutzt auch die Abhängigkeit

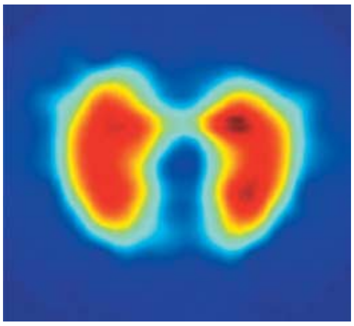


Abb. 3: Tomographische Aufname von zwei Lungenflügeln Abbildung: Verfasser

der Streuung von elektromagnetischen Wellen an metallischen und nichtmetallischen Objekten von deren Position, Größe und Gestalt. Grundsätzlich ließe sich das obige Modellproblem für Wasserwellen dadurch lösen, dass für eine möglichst große Zahl von Objekten vorab experimentell die am Seeufer eintreffenden Wellen registriert und katalogisiert werden. In der konkreten Anwendung kann dann durch den Vergleich der tatsächlich beobachteten Wellen mit den katalogisierten Fällen der eingeworfene Körper identifiziert werden.

Dieses Verfahren und analoge Vorgehensweisen bei den inversen Streuproblemen sind in der Praxis völlig ungeeignet und müssen durch eine effiziente mathematische Modellierung als inverse Probleme für Differentialgleichungen ersetzt werden. Sowohl für die Anwendungen als auch als anspruchsvolle mathematische Aufgabe stellt sich bei inversen Streuproblemen, und grundsätzlich bei allen inversen Problemen, als Erstes die Frage nach der eindeutigen Rekonstruierbarkeit, das heißt, die Frage, ob zur Identifizierung der gesuchten geometrischen und physikalischen Parameter ausreichend Information vorliegt. Die zweite wichtige Aufgabe bildet die Entwicklung, Implementierung und Analyse von in der Praxis einsetzbaren numerischen Rekonstruktionsalgorithmen, die dann in entsprechenden Chips in die Meß- und Visualisierungsgeräte eingebaut werden. Für den aktuellen mathematischen Forschungsstand zu inversen Streuproblemen sei verwiesen auf [2, 3].

Graduiertenkolleg »Identifikation in mathematischen Modellen: Synergie stochastischer und numerischer Methoden«

(red.) Inverse Probleme sind ein wesentliches Element des Graduiertenkollegs 1023 »Identifikation in mathematischen Modellen: Synergie stochastischer und numerischer Methoden«, das von den beiden Instituten für Mathematische Stochastik und für Numerische und Angewandte Mathematik an der Universität Göttingen getragen wird. Mit dieser Thematik ist es Ziel des Graduiertenkollegs, die Kollegiatinnen und Kollegiaten an Identifikation als einen der grundlegenden Aspekte wissenschaftlicher mathematischer Arbeit in den Anwendungen heranzuführen. Dies ist in der ersten Bewilligungsphase seit Juli 2004 vor allem bei inversen Problemen für partielle Differentialgleichungen und bei Parameter- und Modellidentifikationen in der Statistik mit Erfolg durchgeführt worden. Die Forschungsprojekte umfassen dabei neben inversen Streuproblemen und der elektrischen Impedanztomographie unter anderem die Identifizierung von Modellparametern bei turbulenten Strömungen, stochastische inverse Probleme, Lernverfahren mit Kernfunktionen, die Identifizierung von Fingerabdrücken, Sequenziermethoden zur Erkennung von Fremdgenen und Identifizierung von Interdependenzen von Verspätungen in Verkehrsverbünden. Als eine zentrale Forschungsidee sind dabei entsprechend dem Untertitel des Graduiertenkollegs stochastische und deterministische Methoden effizient zusammengeführt und gemeinsam weiterentwickelt worden. Bislang wurden 18 Promotionen erfolgreich abgeschlossen. Die Absolventen haben Arbeitsplätze in Wissenschaft und Industrie gefunden, zum Teil als Postdoktoranden in Göttingen und außerhalb Göttingens und zum Teil in Industrie und Wirtschaft mit engen Bezügen zur Thematik des Kollegs. Ein Teil der ausländischen Kollegiaten sind auf Positionen in ihre Herkunftsländer zurückgekehrt und bieten auch für die Göttinger Mathematik auf diese Weise Perspektiven für nachhaltige internationale wissenschaftliche Kontakte. Mit mehr als 40 Veröffentlichungen in internationalen Journalen und mehr als 30 Vorträgen durch die Kollegiaten auf internationalen Tagungen ist das Graduiertenkolleg sichtbar geworden. Darüberhinaus hat das Graduiertenkolleg in Göttingen vier Tagungen mit breiter internationaler Beteiligung zu Teilbereichen seiner Forschungsthematik durchgeführt. Nach einem erfolgreichen Berichtskolloquium im Juni 2008 bewilligte die Deutsche Forschungsgemeinschaft im November 2,77 Millionen Euro an Fördermitteln zur Weiterführung des Kollegs. Sprecher ist Prof. Dr. Rainer Kreß vom Institut für Numerische und Angewandte Mathematik.

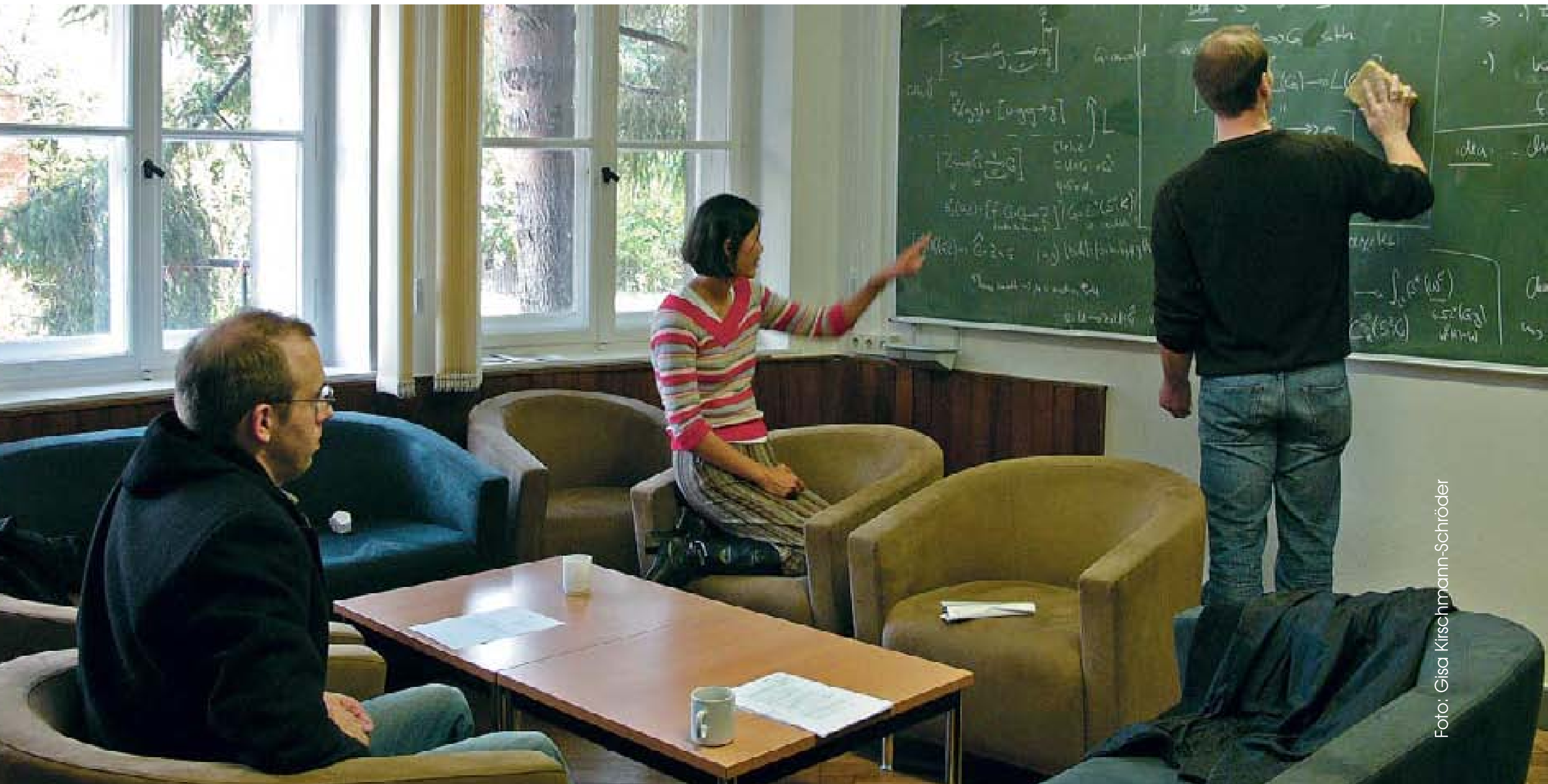


Foto: Gisa Kirschmann-Schröder

Inkorrekt gestellte Probleme

Die inversen Streuprobleme und grundsätzlich eine weite Klasse von inversen Problem sind schlecht beziehungsweise inkorrekt gestellt. Die Definition der Inkorrektheit eines mathematischen Problems geht zurück auf den französischen Mathematiker Jacques Solomon Hadamard (1865 – 1963), der für Modellbildungen bei Problemen aus den Naturwissenschaften um 1900 die folgenden drei Postulate formulierte: 1. Das mathematische Modell besitzt eine Lösung. 2. Das mathematische Modell besitzt höchstens eine Lösung. 3. Die Lösung des mathematischen Modells hängt stetig von den Daten ab, das heißt, das Problem ist stabil in dem Sinne, dass kleine Änderungen der Daten nur zu kleinen Änderungen der resultierenden Lösung führen. Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung sind unmittelbar evident als Forderungen an die mathematische Modellierung von deterministischen Naturvorgängen. Das dritte Postulat ist motiviert durch den Umstand, dass in den Anwendungen die Daten in aller Regel aus Messungen stammen und folglich stets mit Fehlern behaftet sind. Daher soll sichergestellt werden, dass kleine Messfehler in den Daten nur zu kleinen Abweichungen in der resultierenden Lösung führen. Nach Hadamard nennt man ein mathematisches Problem, insbesondere ein Differentialgleichungsproblem, korrekt gestellt oder gut gestellt, wenn alle drei Forderungen erfüllt sind. Andernfalls heißt das Problem inkorrekt gestellt oder schlecht gestellt.

Der rigorose Nachweis für die inkorrekte Problemstellung im Sinne von Hadamard für die hier betrachteten inversen Streuprobleme bedarf tiefer liegender mathematischer Hilfsmittel, so dass wir hier in einer Plausibilitätsbetrachtung wieder die Wasserwellen heranziehen. Es erscheint unmittelbar einleuchtend, dass die durch Einwerfen einer Kugel und einer mit sehr vielen dünnen, aus der Oberfläche ragenden langen Nadeln versehenen gleich großen Kugel verursachten Wasserwellen sich am Seeufer nur wenig unterscheiden, d.h. zwei sehr voneinander verschiedene Objekte rufen die gleichen Wellenmuster am Ufer hervor und sind daher an Hand dieser Daten nicht signifikant unterscheidbar.

Die Hadamardschen Postulate führten dazu, dass in der Mathematik die Forschung über inkorrekt gestellte Probleme lange Zeit vernachlässigt wurde, da solche Probleme als nicht geeignet angesehen wurden für die Modellierung angewandter Problemstellungen. Erst seit etwa vierzig Jahren setzt sich die Erkenntnis durch, dass eine wachsende Zahl von aus den Anwendungen stammenden mathematischen Fragestellungen, darunter alle hier betrachteten inversen Probleme, zu inkorrekt gestellten Problemen führt, und zwar typischerweise unter Verletzung der dritten Bedingung der Stabilität. Entsprechend hat dies zu einer Intensivierung der Forschung auf diesem Gebiet geführt. Ein unerlässlicher Aspekt ist dabei die Notwendigkeit der Stabilisierung von Algorithmen zur Lösung von inkorrekt gestellten Problemen durch so genannte Regularisierungsverfahren.

Tomographie

In der Röntgentomographie werden zweidimensionale Bilder von übereinanderliegenden parallelen zweidimensionalen Schichten erzeugt; die Schichten entsprechen der griechischen Vokabel $\tau o \mu o \varsigma$. Die Bilder einer Schicht werden aufgebaut aus Messungen von Intensitätsverlusten beim Durchgang von Röntgenstrahlen unterschiedlicher Richtungen. Da die Absorption eines Röntgenstrahls lokal proportional zur Dichte f des durchleuchteten Objekts ist, ergibt sich der Intensitätsverlust des Röntgenstrahls entlang einer Geraden L durch Aufsummieren der Dichte in dem Linienintegral $\int_L f\, ds$ über die Gerade L. Das direkte Problem ist, bei bekannter Dichte f die Linienintegrale $\int_L f\, ds$ für alle die Schicht durchlaufenden Geraden L zu berechnen. Das inverse Problem der Röntgentomographie besteht dagegen in der Ermittlung der unbekannten Dichte f aus den gemessenen Intensitätsverlusten, d.h. Linienintegralen über eine endliche Anzahl von Geraden L. In den medizinischen Anwendungen entspricht f der Gewebedichte der durchleuchteten Körperorgane, in technischen Anwendungen ist f die Materialdichte des evaluierten Objekts.

Grundsätzlich ist die Aufgabe, eine Funktion aus ihren Linienintegralen zu ermitteln, schon 1917 vom österreichischen Mathematiker Johann Radon (1887 – 1956) gelöst worden durch Angabe einer expliziten Inversionsformel. Für medizinische Anwendungen wurde die Tomographie erstmals 1963 von dem amerikanischen Physiker südafrikanischer Herkunft Allan McLeod Cormack (1924 – 1998) vorgeschlagen und ab 1970, insbesondere durch die Bemühungen des englischen Elektrotechnikers Godfrey Newbold Hounsfield (1919 – 2004), in die medizinische Praxis eingeführt. Im Jahr 1979 erhielten Cormack und Hounsfield den Nobelpreis in Medizin für ihre Arbeiten zur Röntgentomographie. In der Folgezeit wurde die Bezeichnung Tomographie in nicht völlig korrekter Weise auch für die Benennung von auf anderen Methoden aufbauenden Evaluierungs- und Bildgebungsverfahren benutzt. Unter elektromagnetischen Tomographieverfahren werden dabei Methoden zusammengefasst, die elektromagnetische Wellen beziehungsweise Felder benutzen, einschließlich der Grenzfälle elektrostatischer oder magnetostatischer Felder.

Zu diesem Bereich gehören die Minendetektion mit elektromagnetischen Wellen und die Impe-

Räumung von Minenfeldern in Chile. Ein Soldat sucht mithilfe eines Detektors nach Landminen. Zwischen 1974 und 1978 wurde das Grenzgebiet zu Bolivien, Peru und Argentinien mit Minenfeldern abgesichert.
Foto: Ullstein

danztomographie, bei denen zu der Beschreibung Göttinger Forschungsergebnisse am Ende diese Aufsatzes etwas mehr mathematische Terminologie unvermeidbar ist. Die Minendetektion wird modelliert als inverses Streuproblem für die Maxwellschen Differentialgleichungen

$$curl\ E - i\omega\mu H = 0$$
$$curl\ H + i\omega\varepsilon E = \sigma E$$

für das elektrische Feld *E* und das magnetische Feld *H*. Die physikalischen Größen Dielektrizität ϵ, magnetische Suszeptibilität μ und elektrische Leitfähigkeit σ haben dabei für die beteiligten Medien Luft, Erde und Metall unterschiedliche Werte. Die Frequenz ω bewegt sich bei den gebräuchlichen Minendetektoren im Kilohertz-Bereich. Wie weiter oben schon beschrieben, sendet der über den Boden geführte Detektor ein elektromagnetisches Feld aus, das von der Grenzfläche zwischen Luft und Erde und von im Boden befindlichen Metallteilen gestreut wird. Die gestreute sekundäre Welle induziert in einer Empfängerspule des Metalldetektors eine Spannung U, deren Verlauf bei der Bewegung in einem Bereich oberhalb einer vermuteten Mine grundsätzlich nach entsprechender Modifikation des Detektoraufbaus gemessen werden kann. In dem inversen Streuproblem zur Minendetektion sollen aus dem gemessenen Spannungsverlauf geometrische Parameter zu Form, Größe und Position eines entdeckten metallischen Objekts ermittelt werden. Auf diese Weise lassen sich durch Vergleich mit der bekannten Gestalt von Minen etwa zu kleine, zu große oder zu dünne Objekte als Fehlalarme charakterisieren. Die Göttinger Arbeitsgruppe im Projektverbund hat hierzu das inverse Problem im Sinne der im Folgenden beschriebenen Least Squares Minimierung interpretiert und gelöst [4]. Hierzu wurden die Gestalt und die Lage der Mine durch eine *n*-parametrige Schar von Flächen Γ_α modelliert, beispielsweise durch Ellipsoide, bei denen insgesamt neun Parameter erforderlich sind zur Beschreibung von Position, Größe und Orientierung. Es wird dann diejenige Fläche bestimmt, für die die Abweichung des zugehörenden simulierten Spannungsverlaufs $U(\Gamma_\alpha)$ möglichst wenig vom gemessenen Spannungsverlauf U_{mess} abweicht in dem Sinne, dass das Integral

$$\int_M |U(\Gamma_\alpha) - U_{mess}|^2 ds$$

über den Messbereich M des Detektors bezüglich des Parametervektors $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ minimiert wird. Unter Verwendung eines numerischen Lösungsverfahrens für das direkte Streuproblem an Metallkörpern in dem geschichteten Boden-Luft Medium mit Randintegralgleichungsmethoden zur Simulation der Spannung $U(\Gamma_\alpha)$ und einer ableitungsfreien Simplex-Methode nach Nelder und Mead für die Minimierungsaufgabe konnte demonstriert werden, dass auf diese Weise eine befriedigende Bestimmung von Orts- und Formparametern des Streuobjekts möglich ist. Damit wurde der Nachweis erbracht, dass unter Einsatz von Methoden der inversen Streutheorie das oben beschriebene Ziel der Reduzierung der Fehlalarmraten beim Einsatz von Metalldetektoren zum Minenräumen grundsätzlich erreichbar ist, nach einer entsprechenden messtechnischen Umgestaltung der Detektoren.

Das inverse Problem der Impedanztomographie zur Ermittlung der Leitfähigkeitsverteilung aus am Rand eines elektrisch leitfähigen Objekts an Elektroden gemessenen Strom- und Spannungsverteilungen wird für die verwendeten niederfrequenten Ströme durch die Potenzialgleichung

$$div\ \sigma\ grad\ u = 0$$

für das elektrische Potenzial u modelliert. Das direkte Problem besteht bei vorgegebener Leitfähigkeit σ darin, für verschiedene Stromeinprägungen auf dem Rand die zugehörenden Spannungen zu ermitteln, d.h. für u ein lineares Randwertproblem zu lösen. Das zugehörige inverse Problem besteht in der Ermittlung der ortsabhängigen Leitfähigkeit σ im Innern des Objekts aus der so genannten Strom-nach-Spannung Abbildung, die jeder auf dem Rand vorgegebenen Stromverteilung die resultierende Spannnungsverteilung zuordnet. Für eine detaillierte Beschreibung der Vielfalt der in der mathematischen Literatur und von den Anwendern entwickelten Rekonstruktionsalgorithmen sei verwiesen auf die Übersichtsarbeit von L. Borcea aus dem Jahr 2002 [1].

Bei Leitfähigkeiten mit hohen Kontrasten, wie sie zum Beispiel bei der nichtinvasiven Überwachung der Atmung von Lungenpatienten auftreten, erscheint es sinnvoll, die Leitfähigkeiten durch stückweise konstante Leitfähigkeiten zu approximieren. Dieses vereinfacht das inverse Problem zu einem inversen Randwertproblem zur Laplace Gleichung $\Delta u = 0$ für die Bestimmung der Gestalt der Ränder zwischen den Teilbereichen unterschiedlicher konstanter Leitfähigkeit sowie den Werten der Leitfähigkeiten in den Teilbereichen. Dieses inverse Randwertproblem ist dann nichtlinearen Randintegralgleichungsmethoden zugänglich.

In Kooperation mit der Abteilung Anaesthesiologische Forschung (Direktor Prof. Dr. Gerhard Hellige) und der Arbeitsgruppe Impedanztomographie [6] (Leiter Dr. Günter Hahn) am Zentrum für Anaesthesiologie, Rettungs- und Intensivmedizin der Universitätsmedizin Göttingen ist in zwei vom Verfasser betreuten Dissertationen [5, 7] die theoretische Fundierung und eine numerische Implementierung für diesen Zugang zur Impedanztomographie erarbeitet worden. Dazu gehörte auch eine vorläufige Erprobung der Algorithmen an realen Daten aus der Medizin. Diese Zusammenarbeit wird in dem Projektverbund zur Impedanztomographie weiter fortgesetzt.

Die Darstellung dieser Forschungsaktivitäten macht deutlich, dass Mathematik ein unerlässlicher und bedeutender Bestandteil von nichtinvasiven Bildgebungs- und Evaluierungsverfahren in Medizin und Technik ist. Sie veranschaulicht auch eine wesentliche Stärke der Mathematik: Ihre Methoden sind universell in zunächst völlig verschieden erscheinenden Problemstellungen einsetzbar.

Over the last two decades, inverse problems, in general, and inverse scattering problems, in particular, have developed into an important branch of mathematics. Scattering theory is concerned with the effect of objects or inhomogeneities on the propagation of acoustic, electromagnetic or elastic waves. For direct scattering problems, the objects or inhomogeneities produce a scattered wave and the latter has to be computed. Conversely, in inverse scattering problems from a knowledge on the scattered wave the unknown scattering object has to be retrieved. Inverse scattering has applications in biomedicine, geophysical exploration, environmental pollution, radar imaging and nondestructive testing, among others. In addition to theoretical foundations to inverse scattering, the research at the Institute for Numerical and Applied Mathematics at the University of Göttingen has been concerned with the application of tools from inverse scattering both in the area of humanitarian mine detection by metal detectors and in impedance tomography (which is a newly developed imaging technique with applications in science, medicine and engineering).

Literatur:

[1] Borcea, L.: Electrical impedance tomography. Inverse Problems 18, R99–R136 (2002).

[2] Colton, D. and Kress, R.: Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. 2nd. ed. Springer, Berlin 1998.

[3] Colton, D. and Kress, R.: Using fundamental solutions in inverse scattering. Inverse Problems 22, R49–R66 (2006).

[4] Delbary, F., Erhard, K., Kress, R., Potthast, R. and Schulz, J.: Inverse electromagnetic scattering in a two-layered medium with an application to mine detection. Inverse Problems 24, 015002 (2008).

[5] Eckel, H. and Kress, R.: Nonlinear integral equations for the inverse electrical impedance problem. Inverse Problems 23, 475–491 (2007).

[6] Hahn G, Just, A., Dudykevych, T., Frerichs, I., Hinz, J., Quintel, M. and Hellige, G.: Imaging pathologic pulmonary air and fluid accumulation by functional and absolute EIT. Physiological measurement 27, 187 – 198, (2006).

[7] Hofmann, B.: Approximation of the inverse electrical impedance tomography problem by an inverse transmission problem. Inverse Problems 14, 1171–1187 (1998).

Prof. Dr. Rainer Kreß, Jahrgang 1941, studierte Mathematik und Physik an der Technischen Hochschule Darmstadt, an der er 1968 promoviert wurde und sich 1969 für das Fach Mathematik habilitierte. Nach einer zweijährigen Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Max-Planck-Institut für Physik and Astrophysik in München folgte er 1971 einem Ruf auf einen Lehrstuhl für Numerische und Angewandte Mathematik an die Universität Göttingen. Als Gastprofessor war er für längere Zeit an der University of Strathclyde in Schottland, der University of Delaware in den Vereinigten Staaten und an der University of New South Wales in Australien. Von 1993 bis 1995 war Professor Kreß Vizepräsident der Universität Göttingen, und seit 1995 ist er Mitglied der Göttinger Akademie der Wissenschaften. Sein Hauptforschungsgebiet sind Integralgleichungen mit Schwerpunkt auf deren numerischer Lösung und direkte und inverse Probleme aus der Streutheorie. Er ist Autor von vier Monographien aus diesem Gebiet, von denen eine in russischer und zwei weitere in chinesischer Übersetzung Verbreitung finden.

CERN Opening Day 2008

Beim Wort Geometrie denken wir wahrscheinlich zuerst an Punkte, Geraden und Kreise. Diese Art von Geometrie ist allerdings für die Quantenmechanik ungeeignet, schon der Begriff des Punkts verliert dort seinen Sinn. Die nichtkommutative Geometrie verallgemeinert den Begriff des Raums so, dass auch quantenmechanische Phänomene berücksichtigt werden können. Dazu muss zunächst die Geometrie, ausgehend von einem Koordinatensystem, in eine algebraische Sprache übersetzt werden. Anschließend wird darauf eingegangen, wie der Abstandsbegriff in die nichtkommutative Geometrie übertragen werden kann. Dies führt uns abschließend auf quantisierte Invarianten nichtkommutativer Räume.

Der Raum hinter den Räumen

Nichtkommutative Geometrie

Ralf Meyer

Algebraisierung der Geometrie

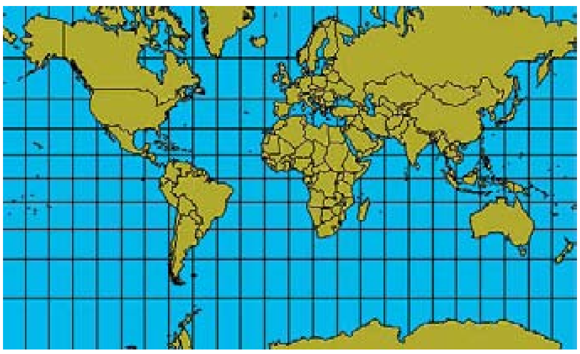
Koordinaten

Seit der Einführung des kartesischen Koordinatensystems durch René Descartes (1596 – 1650) werden Punkte des Raums mit Tripeln von Zahlen (x, y, z) – den Koordinaten – identifiziert. Weil wir mit Koordinaten rechnen können, wird die Geometrie zu einem Teilgebiet der Algebra. Alle geometrischen Objekte und Operationen lassen sich in die Sprache der Algebra übersetzen; zum Beispiel beschreibt die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ die Einheitskugel. Das Rechnen mit Koordinaten ist auch die Grundlage der klassischen Mechanik. Deren Kraftgesetz erklärt die Beschleunigung eines Gegenstands durch die darauf wirkenden Kräfte. Die Differenzialrechnung liefert eine präzise Definition für Geschwindigkeit und Beschleunigung. Aber schon die Definition der Ableitung als Grenzwert von Differenzenquotienten verlangt Rechenoperationen, die ohne Koordinaten undenkbar wären.

Allerdings haben Koordinaten auch ihre Schwächen. Selbst im gewöhnlichen Raum verlangen sie, dass wir den Ursprung und die Koordinatenrichtungen willkürlich wählen.

Auf einer Fläche im Raum, etwa einer Kugeloberfläche, sollten wir nur zwei und nicht drei Koordinaten brauchen. Wir können aber ein Blatt Papier nicht um eine Kugel wickeln, ohne es zu verknittern. Dies wird durch die Krümmung der Kugel verhindert, wie in Thomas Schicks Beitrag genauer besprochen wird. Daher ist jede Karte einer Kugeloberfläche verzerrt. Zum Beispiel entsprechen in der klassischen Mercator-Projektion (vgl. Abb. 1) der gesamte untere und obere Rand der Karte jeweils einem Punkt, dem Nord- und Südpol, sodass polnahe Regionen wie die Antarktis viel größer dargestellt werden, als sie sind. Außerdem erscheint die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten in dieser Projektion nicht als gerade Linie. Das merkt man, wenn man bei einem Transatlan-

Abb. 1: Mercator-Projektion



> »The angel of geometry and the devil of abstract algebra fight for the soul of any mathematical theory.«
> *Hermann Weyl (1885 – 1955)*

tikflug auf dem Bildschirm die Flugroute verfolgt: sie sieht zwar deutlich nach Norden gebogen aus, das ist aber ein Artefakt der gewählten Karte.

Mach's mit Algebra

Koordinaten sind also einerseits sehr nützlich, andererseits aber oft willkürlich und verzerrend. Darum haben Mathematiker als »Schutzhelm« eine Reihe von Konzepten geschaffen, die sicherstellen, dass beim Arbeiten mit Karten am Ende nur kartenunabhängige Ergebnisse herauskommen.

Eine Karte ordnet jedem Punkt eine Reihe von Zahlen – seine Koordinaten – zu. Um uns nicht für eine Karte entscheiden zu müssen, betrachten wir alle Abbildungen, die Punkten Zahlen zuordnen – solche Abbildungen heißen auch Funktionen. Damit können wir genauso rechnen wie mit Zahlen, indem wir ihre Werte in jedem Punkt addieren und multiplizieren. Mathematiker nennen eine Menge von Objekten mit solchen Rechenoperationen und gewissen Eigenschaften eine (kommutative) Algebra.

Der Ausgangspunkt der modernen algebraischen Geometrie ist die Beobachtung, dass wir allein aus dieser Algebra A von Funktionen die Punkte unseres Raums zurückgewinnen können. Sei nämlich x ein Punkt unseres Raums, so können wir Funktionen in x auswerten. Diese Funktion auf A ist ein Charakter von A, das heißt, sie ist mit den Rechenoperationen in A verträglich. Es zeigt sich nun, dass jeder Charakter auf A von dieser Form ist, sodass wir die Punkte unseres Raums mit den Charakteren der Algebra A identifizieren können. Im Prinzip können wir also alle Eigenschaften unseres Raums durch die Algebra ausdrücken.

Ursprünglich wollten wir die Algebra in den Dienst der Geometrie stellen, aber der nun erreichte Raumbegriff kehrt diese Verhältnisse um. Haben wir damit das Kind mit dem Bade ausgeschüttet?

Eine natürliche Stärke des Menschen ist seine Fähigkeit, geometrische Sachverhalte in Sekundenbruchteilen zu erfassen. Es ist für uns buchstäblich ein Kinderspiel, Bälle zu fangen oder auf einem Bild eine Kugel von einer Brezel zu unterscheiden; Computern wird Letzteres gerade mühsam beigebracht. Die Algebra scheint dagegen eher eine Stärke der Computer zu sein, die – anders als Menschen – ein Gleichungssystem mit 100 Gleichungen und 100 Unbekannten in einem Augenblick lösen können. Der geometrische Zugang scheint daher der menschlichen Denkweise viel besser zu entsprechen als der algebraische, sodass eine Algebraisierung der Geometrie nicht sehr vielversprechend erscheint.

Diese Ansicht beruht jedoch auf einem verbreiteten Missverständnis der Algebra (und vielleicht der Mathematik im Allgemeinen). Eigentlich hat sie nämlich gar nicht so viel mit Rechnen zu tun, sondern mit Sprechen, und das können wir tatsächlich immer noch besser als Computer. Eine unserer Hauptstärken hier ist die Analogie, die es uns erlaubt, Ideen in einen völlig anderen Kontext zu übertragen. In der nichtkommutativen Geometrie benutzen wir Ideen aus der Geometrie und der mathematischen Physik zur Untersuchung von Räumen, bei denen die bloße Anschauung versagt.

Beim Rechnen mit Funktionen gelten, wie gesagt, alle Regeln für das Rechnen mit Zahlen. Eines davon, das Kommutativgesetz, besagt, dass die Reihenfolge der Faktoren in Produkten egal ist: Es gilt stets $ab = ba$. In der nichtkommutativen Geometrie lassen wir diese Bedingung fallen und erhalten Algebren, die keinem herkömmlichen Raum mehr entsprechen. Dennoch tun wir so, als wären sie Funktionenalgebren, und versuchen, Begriffe aus der Geometrie auf sie auszudehnen.

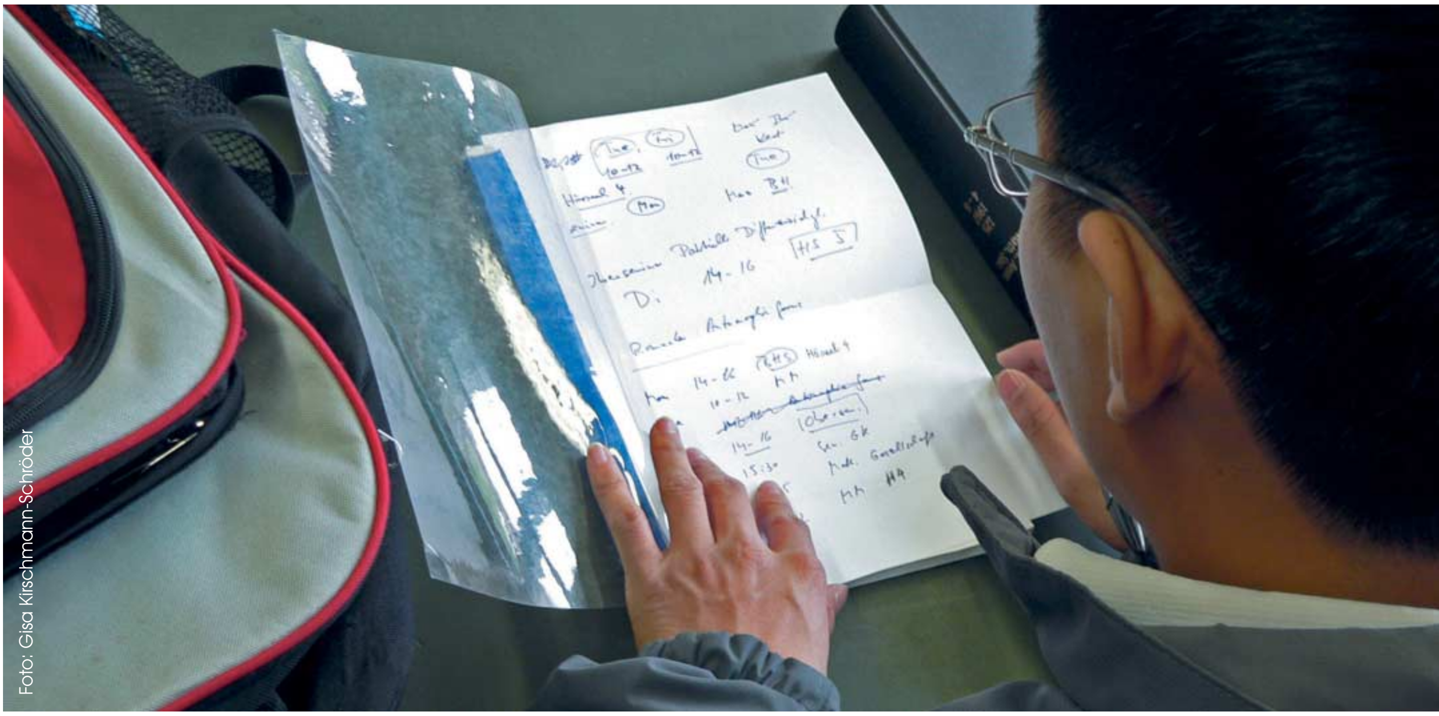
Warum möchte man das überhaupt? Zum einen gibt es einige geometrische Konstruktionen von Räumen, die so schlechte Eigenschaften haben, dass herkömmliche Ansätze versagen. Oft lassen sie sich aber mit nichtkommutativen Algebren in Verbindung bringen, die es dann erlauben, doch noch mit ihnen Geometrie zu betreiben.

Die wichtigste Motivation stammt jedoch aus der theoretischen Physik. Viele Beispiele nichtkommutativer Algebren stammen aus der Quantenmechanik. In der allgemeinen Relativitätstheorie Einsteins wird die Schwerkraft zurückgeführt auf die Geometrie der Raumzeit. Bisher gibt es noch keine konsistente Theorie, die die allgemeine Relativitätstheorie mit der Quantenmechanik zusammenbringt. Diese offene Frage ist eng verbunden mit der nach der Struktur des Raums auf subatomaren Längenskalen, die wir bisher noch kaum verstehen. Der Large Hadron Collider (LHC) am CERN wird die Untersuchung dieser Fragen in den nächsten Jahren hoffentlich durch überraschende experimentelle Daten beflügeln. Daneben kann die nichtkommutative Geometrie wichtige theoretische Beiträge liefern, indem sie eine Sprache bereitstellt, in der man auch mit derart unanschaulichen Räumen noch Geometrie betreiben kann.

Physikalische Wurzeln der nichtkommutativen Geometrie

Heisenbergs Quantenmechanik

Um die Bewegung eines Teilchens vorherzusagen, müssen wir in der klassischen Mechanik seinen Ort und seine Geschwindigkeit ken-



nen. Wir ersetzen die Geschwindigkeit durch den Impuls – wenn man die Relativitätstheorie vernachlässigt, so ist das einfach das Produkt aus Geschwindigkeit und Masse des Teilchens. Nehmen wir zur Vereinfachung an, dass unser Teilchen sich nur auf einer Geraden bewegt, so ist der Zustandsraum eines klassischen Teilchens eine Ebene mit Ort und Impuls als Koordinaten.

In der Quantenmechanik können aber Ort und Impuls eines Teilchens nicht gleichzeitig beliebig genau festgelegt sein. Der Zustand eines Teilchens ist ein viel komplexeres Objekt, aus dem sich nur Wahrscheinlichkeiten ableiten lassen, das Teilchen an einem bestimmten Ort oder mit einem bestimmten Impuls anzutreffen. Mathematisch wird diese Situation beschrieben durch nichtkommutative Algebren.

Dieser Übergang zu nichtkommutativen Algebren lässt sich gut durch die Beobachtungen der Spektroskopie motivieren. Am Ende des 19. Jahrhunderts wurden Spektren für verschiedene Atome aufgenommen; sie zeigen, bei welchen Frequenzen ein Atom Licht ausstrahlen oder absorbieren kann. An ihnen lässt sich das Atom wie an einem Fingerabdruck ablesen. So bestimmen wir heute die chemische Zusammensetzung entfernter Sterne und Planeten (vgl. Abb. 2).

Rydberg stellte um 1890 fest, dass die Spektrallinien des Wasserstoffs sich alle in die Form

$$\nu_{ij} = \frac{R}{i^2} - \frac{R}{j^2}$$

mit einer gewissen Naturkonstanten R und positiven ganzen Zahlen i und j bringen lassen. Mit ν_{ij} und ν_{jk} ist also auch $\nu_{ij} + \nu_{jk} = \nu_{ik}$ wieder eine Spektrallinie, aber dies gilt nur für Spektrallinien, die wie oben zusammenpassen. Atommodelle aus der klassischen Mechanik sagen dagegen voraus, dass alle Summen von Spektrallinien wieder Spektrallinien sind.

Die Spektrallinien sind die grundlegenden beobachtbaren Größen des Atoms – auch Observablen genannt. Da man mit Observablen rechnen möchte, liegt es nahe, Observablen als Funktionen zu betrachten, die jeder Spektrallinie ν_{ij} eine gewisse Amplitude a_{ij} zuordnen; diese Amplituden sind komplexe Zahlen, das spielt aber hier keine große Rolle. Die Addition geschieht eintragsweise, und für das Produkt postulierte Werner Heisenberg die Regel

$$(a \cdot b)_{ik} = \Big(\sum_j a_{ij} b_{jk}\Big).$$

Weil solche unendlichen Summen im Allgemeinen nicht konvergieren, müssen wir jetzt Bedingungen an die Amplituden stellen, damit diese Formel überhaupt einen Sinn hat. Es gibt hier mehrere Möglichkeiten, so dass es ganz verschiedene Algebren gibt, die von sich behaupten können, dieses physikalische System zu beschreiben. Wir beachten solche Unterschiede aber hier nicht.

Physikalische Größen wie Ort, Impuls und Energie lassen sich als Elemente der Observablenalgebra

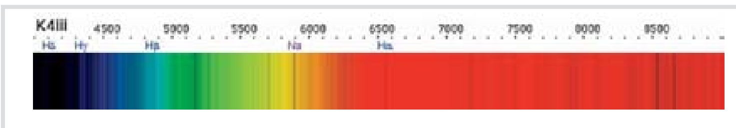
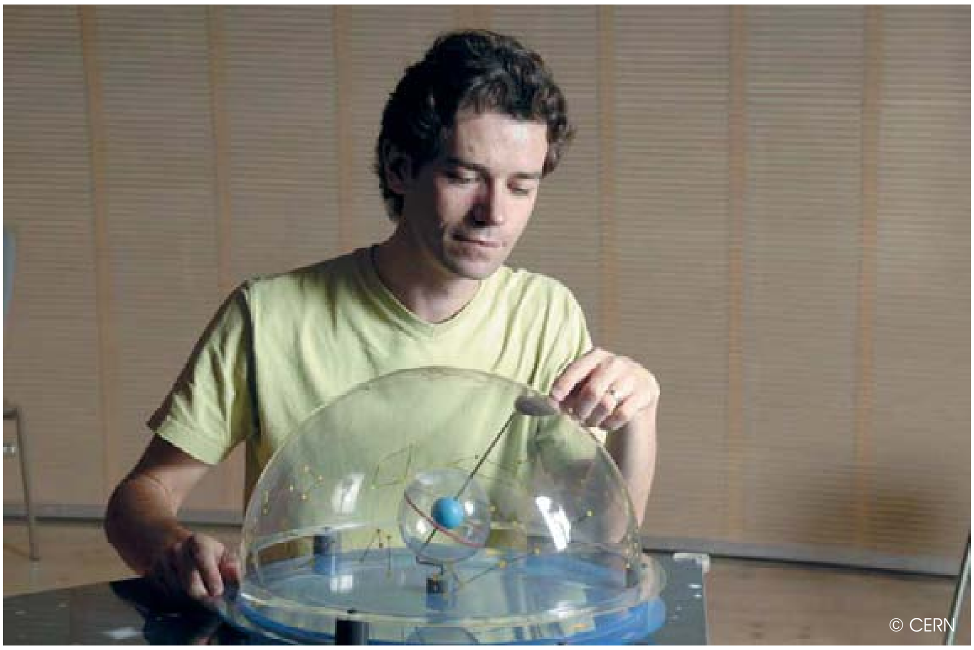


Abb. 2:
Absorptionsspektrum eines Sterns



deuten. Aus der Heisenbergschen Zeitentwicklungsformel folgt, dass eine Observable sich mit der Zeit nicht ändert, wenn sie mit der Energie vertauscht (im Sinne $H \cdot x = x \cdot H$, wobei H die Energie und x die Observable ist) wird. Also erlaubt nur die Nichtkommutativität der Observablenalgebra einem quantenmechanischen System, sich zu bewegen.

Eine Analogie zwischen Heisenbergs Zeitentwicklungsformel und entsprechenden Formeln in der klassischen Mechanik legt nahe, dass die Orts- und Impulsobservablen die so genannte kanonische Vertauschungsrelation erfüllen. Die von dieser Relation erzeugte Algebra heißt auch Weyl-Algebra. Sie beschreibt eine quantisierte Ebene, bei der die Orts- und Impulskoordinaten in Produkten nicht miteinander vertauschen. Diese quantisierte Ebene und ihre Beziehung zur gewöhnliche Ebene spielen eine wichtige Rolle in der nichtkommutativen Geometrie.

Ein Ersatz für den Abstand

In der Geometrie betrachten wir neben den Punkten eines Raums auch Geraden und Kreise, und wir messen Winkel und Abstände. Der wesentliche Begriff hier ist der des Abstands: Kennen wir nur die Punkte eines Raums und die Abstände zwischen ihnen, so können wir alle anderen geometrischen Begriffe daraus rekonstruieren. Der Abstand zwischen Punkten hat aber in der nichtkommutativen Geometrie gar keinen Sinn, weil es keine Punkte mehr gibt. Dieses Problem wird durch die so genannten Spektraltripel gelöst, die ich wiederum durch einen Exkurs in die Physik erklären möchte.

Da man sich die Entstehung von Atomspektren schwer vorstellen kann, betrachte ich zunächst Schwingungen makroskopischer Gegenstände, etwa einer Saite oder einer Membran. In beiden Fällen ist jede Schwingung eine Mischung aus harmonischen Schwingungen mit gewissen charakteristischen Frequenzen. Bei der Saite zum Beispiel sind dies gerade alle Vielfachen einer Grundfrequenz, die umgekehrt proportional zur Länge der Saite ist. Zu jeder dieser Frequenzen gehört ein bestimmtes Schwingungsmuster, das die Amplitude der Schwingung in jedem Punkt beschreibt. Bei einer schwingenden dünnen Platte lassen sich diese Muster sichtbar machen, indem die Platte mit Sand bestreut wird. Die dabei auftretenden Chladnischen Klangfiguren (vgl. Abb. 3) beschreiben genau die Nullstellen der Schwingungsamplitude.

Für uns ist vor allem ein Aspekt wichtig: begrenzen wir die Energie einer Schwingung, so bewegen sich benachbarte Punkte weitgehend synchron. Wir können sogar den Abstand zwischen Punkten exakt aus der Wechselwirkung der Algebra von Funktionen mit dem Energieoperator berechnen. Diese Umformulierung können wir dann auch auf nichtkommutative Räume anwenden.

Vom physikalischen Raum erwarten wir, dass er sich auf großen Längenskalen klassisch verhält: im Alltag bemerken wir quantenmechanische Effekte ja nicht direkt. Es ist bisher nicht bekannt, wie man solche Aussagen über das Verhalten von nichtkommutativen Räumen auf großen Längenskalen formulieren kann. Für klassische geometrische Objekte erlaubt es die so genannte Grobgeometrie, die in Göttingen von mir und Thomas Schick betrieben wird, Phänomene auf endlichen Längenskalen herauszufiltern. Eine der Fragen, mit denen ich mich beschäftige, ist die Ausdehnung dieser Theorie auf nichtkommutative Räume, mit der man ihr klassisches Verhalten auf großen Längenskalen feststellen kann.

Es ist besser, die klassischen Schwingungen der Akustik durch

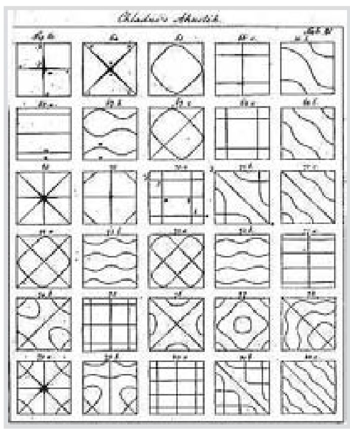


Abb. 3: Chladnische Klangfiguren

ein quantenmechanisches Analogon zu ersetzen. Die für uns relevanten Schwingungen beruhen auf dem Dirac-Operator, benannt nach dem britischen Physiker Paul Dirac (1902 – 1984). Im einfachsten Fall der reellen Geraden ist der Dirac-Operator bis auf einen konstanten Faktor der Ableitungsoperator $f \mapsto f'$, in höheren Dimensionen ist er komplizierter. Ursprünglich wurde er eingeführt, um Elektronen quantenmechanisch zu beschreiben, und dies leistet er bis heute.

Der Dirac-Operator hat ein diskretes »Spektrum«, bestehend aus den möglichen Frequenzen harmonischer Schwingungen. Dieses Spektrum ist wie ein Fingerabdruck unseres Raums, aus dem man auch einiges über ihn ablesen kann, etwa Dimension, Volumen und mittlere Krümmung. Anders als bei chemischen Elementen wird aber ein Raum durch das Spektrum seines Dirac-Operators nicht eindeutig bestimmt: erst die Kombination mit der Algebra der Funktionen legt ihn fest. Diese Kombination heißt Spektraltripel. Sie ersetzen in der nichtkommutativen Geometrie den Abstandsbegriff, ohne über Punkte reden zu müssen.

Der Dirac-Operator ist eine Quadratwurzel eines anderen Operators, der klassische Schwingungen beschreibt. Bei Quadratwurzeln von Zahlen gibt es bekanntlich zwei Möglichkeiten, nämlich die positive und die negative. Solche quantisierten Informationen sind stabil bei kleinen Änderungen an Parametern. Auch der Dirac-Operator enthält neben dem Wachstum der Eigenwerte noch quantisierte Information, die bei kleinen Änderungen stabil bleibt und daher auch in komplizierteren Beispielen noch berechenbar ist.

Eines meiner Hauptarbeitsgebiete ist die bivariante K-Theorie, die sich genau mit solchen quantisierten Informationen befasst. Sie heißt bivariant, weil sie von zwei nichtkommutativen Räumen abhängt, und der Buchstabe K hat keine besondere Bedeutung – irgendwie muss die Theorie ja heißen. Grob gesagt, beschreibt diese Theorie, welche quantisierte Information für bestimmte Typen von Spektraltripeln auftreten kann. Besonders interessant ist hier das Wechselspiel zwischen Analysis und Geometrie. Die Definition der bivarianten K-Theorie geht von bestimmten Arten von Differentialgleichungen aus und ist entsprechend analytisch geprägt; aber die Resultate hängen nur von topologischen Eigenschaften ab.

Angefangen mit Plancks Quantisierungspostulat für schwarze Strahler spielen quantisierte Grössen natürlich eine zentrale Rolle für die Quantenmechanik. Bei manchen davon, etwa bei topologischen Anomalien in der Renormierungstheorie, kennt man inzwischen den Zusammenhang mit K-Theorie, bei anderen, etwa bei Ladungen von Elementarteilchen, ist dies noch unklar. Das ist eine der Fragen, die im Rahmen des Graduiertenkollegs »Mathematische Strukturen in der modernen Quantenphysik« untersucht werden.

Zusammenfassung

Zunächst hat uns der Koordinatenbegriff auf eine rein algebraische Beschreibung von geometrischen Objekten geführt. Diese erlaubt es, Geometrie mit wenig anschaulichen Räumen zu betreiben, wie sie unter anderem in der Quantenmechanik auftreten. Insbesondere haben wir gesehen, wie man von der Spektroskopie zu nichtkommutativen Algebren geführt wird. Ein wichtiges Konzept der nichtkommutativen Geometrie sind Spektraltripel, die den Abstand zwischen Punkten ersetzen, der für nichtkommutative Räume keinen Sinn mehr hat. In der nichtkommutativen Geometrie gibt es noch viele offene Grundlagenfragen, deren Beantwortung helfen kann, die Struktur des Raums auf kleinen Längenskalen zu verstehen. Darunter sind eher geometrische Fragen, wie die nach der Struktur von nichtkommutativen Räumen auf großen Längenskalen, und eher quantenmechanische Fragen, wie die nach quantisierten Informationen in der bivarianten K-Theorie.

Blick in den CMS-Detektor am CERN Kernforschungszentrum

The idea to describe points in space by Cartesian coordinates leads to the notion of manifold – these are spaces that admit local coordinates. The introduction of coordinates allows us to translate geometric problems into algebraic ones. But it may be misleading to single out a particular coordinate system, and sometimes any local coordinate system distorts the geometry of the space.

We have described a space algebraically without introducing coordinates, using the algebra of functions on the space, and we have seen how to recover the underlying space from this algebra as its space of characters. Hence all constructions in geometry should be translatable into the language of algebra. This is useful because once geometric insights are formulated in this language, they may be applied to problems that have nothing to do with geometry. In particular, non-commutative geometry tries to combine geometry and quantum mechanics in this fashion.

Spectroscopic observations in the late 19th century may be interpreted naturally in terms of a non-commutative algebra of observables. This algebra was first made explicit by Heisenberg, who also found a conceptual explanation for its structure in terms of canonical commutation relations. Quantum mechanics predicts that on subatomic length-scales space and time itself behave like a non-commutative algebra instead of a classical geometry. Therefore, we expect the geometry of the real world to become non-commutative when quantum phenomena are taken into account.

The geometry of a space is traditionally described by specifying the distances between points. At first sight, it seems impossible to encode such information in the algebraic language of non-commutative geometry – pointlike events cannot exist in quantum mechanics. Nevertheless, there is a good substitute for it, which uses the propagation of waves inside a space – which still makes sense in the quantum world. Put simply, the distance between two points is replaced by the amount of energy that is needed for an oscillation to separate these two points. Thus the distance function is replaced by a certain differential operator, the Dirac operator, introduced by Dirac in order to model electrons in relativistic quantum mechanics. The combination of the Dirac operator and the algebra of functions contains enough information to recover the manifold and the distances between points in the manifold.

Besides the set of its eigenfrequencies, which is related to the geometry of a space, the Dirac operator also contains some quantised information. Due to its discrete character, this information is stable under deformations and can therefore be computed in many examples. By definition, the Dirac operator is a square root of the Laplace operator. The square root of a number is unique up to a sign; for square roots of operators, there are far more possibilities. Roughly speaking, bivariant K-theory, my own specialty within non-commutative geometry, organises these possibilities. While its definition is an abstraction of certain differential operators appearing in analysis, the end result is a purely topological invariant for non-commutative spaces. K-theory is related to – or at least expected to be related to – quantised objects in quantum mechanics like charges or anomalies.

Prof. Dr. Ralf Meyer, Jahrgang 1974, studierte als Stipendiat der Studienstiftung des Deutschen Volkes Mathematik an der Universität Osnabrück. Bereits als Schüler war der dreimalige Sieger des Bundeswettbewerbs Mathematik in den Jahren 1992, 1993 und 1994 als Mathematiktalent aufgefallen. Sein Mathematikstudium schloss er 1996 mit dem Diplom ab und wechselte zu weiteren Studien 1996/97 an die University of California, Berkeley (USA). Von 1997 bis 1999 bereitete er sich im Rahmen des Sonderforschungsbereichs »Geometrische Strukturen in der Mathematik« an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster auf die Promotion vor und wurde im Jahr 1999 summa cum laude promoviert. Im Juni 2004 habilitierte sich der Mathematiker in Münster. Nach einer Vertretungsprofessur an der Universität Göttingen im Studienjahr 2005/06, erhielt er im April 2006 den Ruf an die Georgia Augusta. Prof. Meyer ist Sprecher des Graduiertenkollegs »Mathematische Strukturen in der modernen Quantenphysik« und Mitglied im Direktorium des Courant Forschungszentrums »Strukturen höherer Ordnung in der Mathematik«.

Graduiertenkolleg »Mathematische Strukturen in der modernen Quantenphysik«

(red.) Ein Ziel der modernen Mathematik ist es, die Physik von Materie, Zeit und Raum auf der Quantenskala zu beschreiben und zu verstehen. Die theoretische Behandlung der dort auftretenden Phänomene benötigt neue Konzepte und Methoden aus verschiedenen Bereichen der Mathematik, von neuartigen Zugängen zu Geometrie und Topologie über neue Techniken in der Analysis unendlicher Systeme bis zur Theorie der Invarianten von Operatoralgebren und zur Kategorientheorie. Um die grundlegenden Naturgesetze zu formulieren und anzuwenden, die die physikalischen Prozesse von der Entstehung von Teilchen in modernen Beschleunigern bis hin zur Bildung und Entwicklung unseres Universums beherrschen, sind hier Fortschritte in der Forschung wichtig.

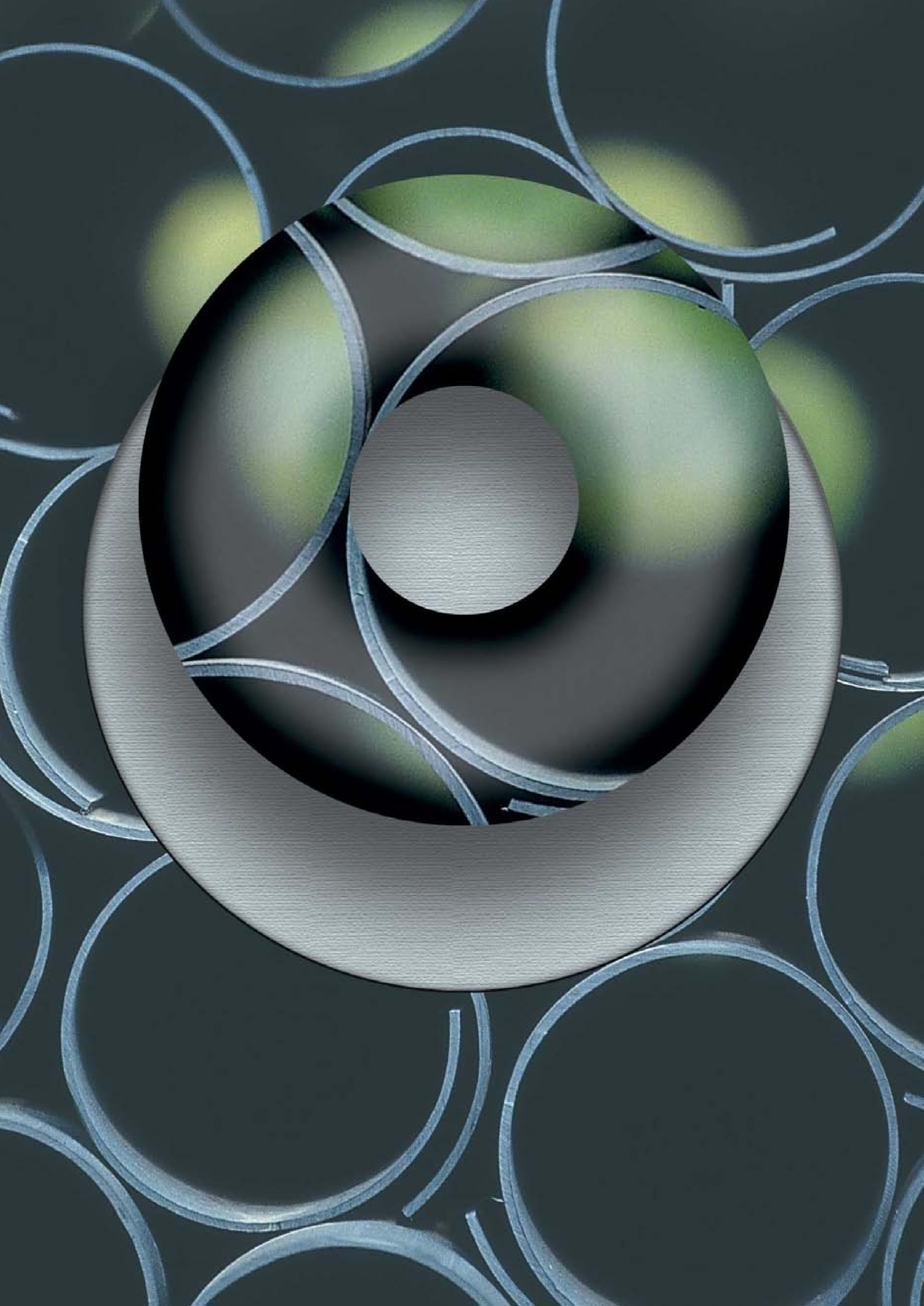
Das am 1. April 2008 an der Georg-August-Universität Göttingen eingerichtete Graduiertenkolleg 1493 »Mathematische Strukturen in der modernen Quantenphysik« untersucht die relevanten mathematischen Strukturen und wendet sie auf Probleme aus der Quantenfeldtheorie an. Die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) fördert das Graduiertenkolleg für einen Zeitraum von vier Jahren mit rund 1,75 Mio Euro und finanziert damit 14 Doktorandenstipendien und zwei Postdoktorandenstellen.

Das Kolleg bietet Doktoranden aus Mathematik und theoretischer Physik eine breite Ausbildung, die es ihnen erlaubt, erfolgreich Fragen im Grenzbereich zwischen Mathematik und Quantenphysik zu erforschen. In einer Vorlesung, die gemeinsam von einem Mathematiker und einem Physiker gestaltet wird, lernen sie zentrale Ideen der mathematischen Physik kennen, einschließlich konzeptioneller und konstruktiver Aspekte der Quantenfeldtheorie und bestimmter Bereiche der Stringtheorie. Die Forschungsarbeit der Kollegiaten wird von interdisziplinären Betreuungskomitees begleitet und erfolgt im Rahmen der Georg-August University School of Science (GAUSS), die eine strukturierte Doktorandenausbildung in allen mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultäten sicherstellt.

Das Graduiertenkolleg ist eingebettet in ein aktives Forschungsumfeld mit etablierten internationalen Kontakten und Kooperationen. Es arbeitet eng mit dem in Göttingen neu etablierten Courant Forschungszentrum »Strukturen höherer Ordnung in der Mathematik« (Higher order structures in mathematics) zusammen. Die Doktoranden haben ausgezeichnete Aussichten auf Stellen im akademischen Bereich, von der reinen Mathematik bis in die theoretische Physik. Wegen ihrer breiten interdisziplinären Ausbildung werden sie auch als Generalisten und Problemlöser in zahlreichen Bereichen der Privatwirtschaft gefragt sein.

Sprecher des Kollegs ist der Mathematiker Prof. Dr. Ralf Meyer. Weitere beteiligte Hochschullehrer sind Prof. Dr. Detlev Buchholz und Prof. Dr. Karl-Henning Rehren aus dem Institut für Theoretische Physik, Prof. Dr. Laurent Bartholdi, Dr. Pablo Ramacher, Prof. Dr. Thomas Schick, Prof. Dr. Andreas Thom, Prof. Dr. Ingo Witt vom Mathematischen Institut sowie die drei neu eingestellten Juniorprofessorinnen Dr. Dorothea Bahns, Dr. Hannah Markwig und Dr. Chenchang Zhu vom Göttinger Courant Forschungszentrum »Strukturen höherer Ordnung in der Mathematik«.


Foto: Gisa Kirschmann-Schröder



Carl Friedrich Gauß leitete während seiner Zeit als Professor für Mathematik und Astronomie an der Georgia Augusta die Vermessung des Königreichs Hannover, mit dem Ziel, korrektere Landkarten zu erstellen. Dabei hatte er mit einem Problem zu kämpfen, das auch heute in der Kartographie auftritt: Eine völlig verzerrungsfreie Darstellung des Geländes mit all seinen Hügeln und Tälern auf einem flachen Stück Papier war und ist nicht möglich. Der Grund ist die Krümmung des Geländes. Aber was ist das eigentlich genau? Als genialer Mathematiker arbeitete Gauß den mathematischen Kern dieses Problems heraus und begründete damit ein neues Teilgebiet der Geometrie: die Krümmung von Flächen. Bis heute ist dies ein wichtiger Bereich der Mathematik, der im Laufe der Zeit weiterentwickelt wurde. An der Universität Göttingen wird in der Arbeitsgruppe »Geometrie und Topologie« neben anderen Forschungsfragen vor allem zum Thema Krümmung intensiv geforscht.

Die vierte Dimension

... oder wann ist die Krümmung positiv?

Thomas Schick

Mathematisch betrachtet ist eine Fläche ein zweidimensionales Objekt, das vollkommen glatt ist, sodass die Umgebung jeden Punktes wie ein verzerrtes Stück einer Ebene aussieht. Beispiele sind

- ▶ die Oberfläche einer Kugel, 2-dimensionale Sphäre genannt,
- ▶ die Oberfläche eines Rettungsrings, 2-Torus genannt (Abb. 1)
- ▶ sowie jede Ebene.

Unter »Krümmung« stellt man sich im Alltag ganz unterschiedliche Dinge vor. Für die mathematische Untersuchung der Krümmung müssen genaue Festlegungen getroffen werden. Das geschieht folgendermaßen: Der mathematisch »korrekte« Krümmungsbegriff ordnet jedem Punkt einer Fläche eine Zahl zu, die misst, wie stark die Fläche an diesem Punkt gekrümmt ist. Diese Zahl nennen wir die Skalarkrümmung oder Gauß-Krümmung. Weiter unten wird erklärt, wie die Skalarkrümmung berechnet wird.

Von einer Fläche kann nur dann eine verzerrungsfreie Karte hergestellt werden, wenn die Skalarkrümmung überall Null ist. Ein gebogenes Blatt Papier oder eine Zylinderoberfläche wie in Abb. 2 haben die Skalarkrümmung Null, auch wenn wir sie im Alltagsverständnis als »krumm« bezeichnen würden. Anders verhält es sich bei der Krümmung einer Kugeloberfläche. Hier wissen wir aus Erfahrung, dass sie nicht ohne Deformation in eine Ebene gepresst werden kann. Der Unterschied liegt darin, dass ein Blatt immer nur in eine Richtung gebogen werden kann. Die Kugeloberfläche ist jedoch gleichzeitig in zwei Richtungen gebogen. Die Skalarkrümmung einer Fläche an einem Punkt wird nun mithilfe der Radien von zwei Kreisen bestimmt, welche sich in zwei senkrechten Richtungen möglichst genau an die Fläche anschmiegen[1] (Abb. 2 und 3). Hier gibt es noch eine Subtilität zu betrachten: Wenn die sich ergebenden Kreise in dieselbe Richtung zeigen, dann deklariert man die Krümmung als positiv. Dies ist an jedem Punkt der Sphäre der Fall. Sollten die Kreise jedoch in entgegengesetzte Richtungen zeigen, spricht man von negativer Krümmung, zum Beispiel an einem Sattel wie in Abb. 3 oder an den »inneren Punkten« eines Torus.

Um die Skalarkrümmung auf diese Weise zu bestimmen, muss man die Fläche »von außen« betrachten. Gauß hat allerdings bewiesen, dass man die Skalarkrümmung auch rein intrinsisch innerhalb der Fläche bestimmen kann. Dazu schaut man sich auf der Fläche einen sehr kleinen Kreis um den gewählten Punkt herum an. Ist seine Länge kleiner als die Länge eines Kreises mit demselben Radius in der Ebene, so liegt an diesem Punkt positive Krümmung vor, ist sie größer, so liegt negative vor.[2]

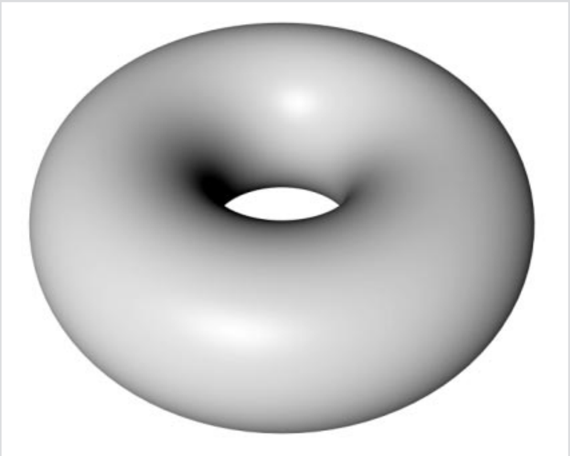


Abb. 1: Die Oberfläche eines Rettungsrings wird Torus genannt und ist ein Beispiel für eine zweidimensionale Fläche.

Wenn die Skalarkrümmung einer Fläche nicht überall Null ist, kann man keine verzerrungsfreien Karten anfertigen, wie bereits am Beispiel des Zylinders und der Kugel dargestellt. Im Folgenden wollen wir uns die Flächen als aus sehr stark dehnbarem Gummi bestehend vorstellen, sodass man die Fläche deformieren kann. Jede

1 Die Gauß-Krümmung ist genauer als das Produkt der Kehrwerte dieser Radien definiert.

2 Im Detail muss man hier einen Grenzwert bilden und Kreise von immer kleinerem Radius betrachten. Man erhält auf diese Weise aber eine intrinsische Formel für die Skalarkrümmung.

Courant Forschungszentrum »Strukturen höherer Ordnung in der Mathematik«

(red.) Das Zukunftskonzept der Georg-August-Universität Göttingen, das im Rahmen des Antrags in der zweiten Auswahlrunde der Exzellenzinitiative des Bundes und der Länder vorgelegt wurde, umfasst verschiedene Maßnahmen: Brain Gain, Brain Sustain, LichtenbergKolleg, Göttingen International. Sie sollen deutsche und ausländische Spitzenforscher anziehen und an die Universität binden sowie die Entwicklung eines gemeinsam mit den außeruniversitären Forschungseinrichtungen Göttingens bestehenden Forschungscampus beschleunigen. Eine der Schlüsselmaßnahmen im Rahmen von Brain Gain ist die Unterstützung von Nachwuchsforschungsgruppen in neu gegründeten interdisziplinären Forschungszentren, den Courant Forschungszentren. Zunächst werden fünf neue Zentren gegründet, die jeweils ein innovatives Forschungsgebiet repräsentieren. Darunter ist das Courant Forschungszentrum »Strukturen höherer Ordnung in der Mathematik« (Higher Order Structures in Mathematics) mit drei Nachwuchsgruppen. Das Besondere am Göttinger Konzept ist, dass die Nachwuchsgruppenleiter schon wenige Jahre nach der Promotion auf Tenure-Track-Stellen berufen werden. Dadurch und durch die gute Ausstattung ist das Angebot auch im Vergleich zu den besten Universitäten im Ausland konkurrenzfähig. Ein weiteres Ziel des Zukunftskonzepts ist die Erhöhung des Frauenanteils in Fächern, in denen sie bisher unterrepräsentiert sind; dabei helfen flexible Dual-Career-Angebote. Das Direktorium des Zentrums besteht aus den Professoren Laurent Bartholdi, Detlev Buchholz, Ralf Meyer, Samuel Patterson, Karl-Henning Rehren, Ingo Witt und Thomas Schick als geschäftsführendem Direktor.

Inzwischen haben drei Nachwuchsgruppenleiterinnen Rufe auf die ausgeschriebenen W1-Tenure-Track-Stellen angenommen. Im Laufe des Sommers 2008 nahmen die folgenden Gruppen ihre Arbeit auf:

– Dorothea Bahns baut die Gruppe »Nichtkommutative Geometrie und mathematische Physik« auf. Ihr Forschungsgebiet ist die Verbindung von Quantenfeldtheorie und nicht-kommutativer Geometrie. Sie interessiert sich insbesondere für Renormierung – inklusive der analytischen Aspekte – von Quantenfeldtheorie auf nichtkommutativen Räumen. Dieser Formalismus beruht auf quantisierten Versionen der Einsteinschen Relativitätstheorie.

– Hannah Markwig leitet die Gruppe »Algebraische Geometrie und Kombinatorik«. Ihr Forschungsgebiet ist das sich schnell entwickelnde Gebiet der tropischen algebraischen Geometrie. Sie interessiert sich einerseits für Grundlagenfragen in diesem Gebiet, andererseits für Anwendungen in der enumerativen algebraischen Geometrie. Beispielsweise sollen effektive Wege beschrieben werden, aus der Stringtheorie vorausgesagte Formeln für klassische Zählprobleme zu beweisen.

– Chenchang Zhu führt die Gruppe »Differentialgeometrie«. Hier werden Strukturen aus der höheren Kategorientheorie wie Gruppoide, differenzierbare Stacks und Gerben und ihre Anwendungen in Poissongeometrie und symplektischer Geometrie untersucht. Frau Zhu ist mit Laurent Bartholdi verheiratet, der gleichzeitig einen Ruf auf eine W3-Professur am Mathematischen Institut in Göttingen angenommen hat.

Außerdem bietet das Courant Forschungszentrum Stellen für weitere acht Doktoranden und Postdoktoranden, die insbesondere innerhalb der Nachwuchsgruppen arbeiten werden. Die mathematischen Schwerpunkte des Zentrums orientieren sich an vorhandenen Stärken der Göttinger Mathematischen Fakultät: Geometrie, Zahlentheorie und Topologie mit Bezügen zur mathematischen Physik, wie ja auch an den Themenschwerpunkten der drei Nachwuchsgruppen abzulesen ist.

An jedem Forschungsthema sind jeweils mehrere Wissenschaftler beteiligt. Bemerkenswert ist die enge Zusammenarbeit mit zwei theoretischen Physikern, Prof. Dr. Karl-Henning Rehren und Prof. Dr. Detlev Buchholz, dem diesjährigen Träger der Max-Planck-Medaille der Deutschen Physikalischen Gesellschaft. Diese Zusammenarbeit wird verstärkt durch das gerade gestartete Graduiertenkolleg »Mathematische Strukturen in der modernen Quantenphysik«. Das Forschungszentrum wird ein umfangreiches Gäste- und Konferenzprogramm organisieren. Hierzu gehört auch der Austausch mit Partnerinstituten. Beispielsweise wurde im Oktober die Konferenz »Symmetries in Algebra and Number theory« in enger Partnerschaft mit der Universität Jerusalem in Göttingen durchgeführt. Für Januar 2009 ist die Konferenz »Foundations and Constructive Aspects of QFT« geplant. Informationen zum Courant Forschungszentrum sind im Internet unter www.crcg.de/wiki abrufbar.

Die Euler-Charakteristik chi(F) einer Fläche F erhält man, indem man diese Fläche in (gebogene) Polygone zerlegt. Es gilt dann chi(F)= e-k+f, wobei e die Anzahl der Ecken, k die Anzahl der Kanten und f die Anzahl der Flächen ist. Diese Zahl ist unabhängig von der gewählten Zerlegung und hängt nur von der gegebenen Fläche ab (Abbildung 4).

feste Form legt die Abstände auf der Fläche – eine so genannte Riemannsche Metrik – fest, und dann ist auch die Krümmung wie oben beschrieben festgelegt. Deformationen liefern dann andere dieser Metriken, mit anderen Krümmungen. So kann man eine Sphäre ohne Probleme so deformieren, dass man in der Nähe eines Pols die Krümmung Null erhält, nämlich indem man sie dort platt drückt.

Ist eine (Gummi-)Fläche, beispielsweise die Sphäre gegeben, fragt man sich, ob durch geschickte Deformation eine vorgegebene Krümmung erreicht werden kann. Könnte man etwa die Erdoberfläche so deformieren, dass überall Krümmung Null vorliegt, was die Herstellung von präzisen Landkarten vereinfachen würde?

Das Theorem von Gauß-Bonnet gibt eine Antwort auf die obige Frage: Der Mittelwert der Skalarkrümmung für alle Punkte einer Fläche ist die Euler-Charakteristik dieser Fläche, eine Zahl, die nur von der (Gummi-)Fläche und nicht von der Metrik abhängt. Für die Sphäre ist die Euler-Charakteristik gleich 2. Damit ein Mittelwert positiv sein kann, muss natürlich zumindest an manchen Stellen der Fläche die Krümmung positiv sein, auf der Sphäre kann man also nicht überall den Wert Null erreichen. Die Euler-Charakteristik des Torus wiederum ist Null, sodass man hier keine Metrik erhalten kann, welche überall positive Krümmung aufweist: Positive Bereiche müssen immer durch negative Bereiche »kompensiert« werden, um den Mittelwert Null zu erhalten.

Bis jetzt haben wir nur Flächen betrachtet, die wir uns als Teilmengen des Raums vorgestellt haben. Wichtig war aber nur die Fläche per se, sowie die Längen und Abstände auf der Fläche. Auf diese Weise kann man ganz abstrakt eine Fläche mit Riemannscher Mektrik definieren, welche gar nicht als Teilmenge des dreidimensionalen Raums definiert werden kann. Betrachten wir hierzu den Torus. Diesen kann man aus einem quadratischen Blatt Papier herstellen, indem man zunächst ein Paar gegenüberliegender Seiten verklebt – dies ist ohne Verzerrungen möglich und ergibt eine Röhre – und anschließend die sich gegenüberliegenden Kreise am Ende der Röhre (Abb. 5). Um diesen zweiten Verklebeprozess innerhalb des Raums durchzuführen, sind Verzerrungen unvermeidbar. Abstrakt kann man aber die Metrik einfach unverändert lassen und muss dann akzeptieren, dass, wenn man an einem Ende der Röhre angekommen ist, es nahtlos an der gegenüberliegenden Seite weitergeht. So erhält man auf dem Torus eine (abstrakte) Riemannsche Metrik, welche überall Krümmung Null hat. Das Gauß-Bonnet-Theorem gilt auch für abstrakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten, und in der Tat hat der Torus Euler-Charakteristik Null.

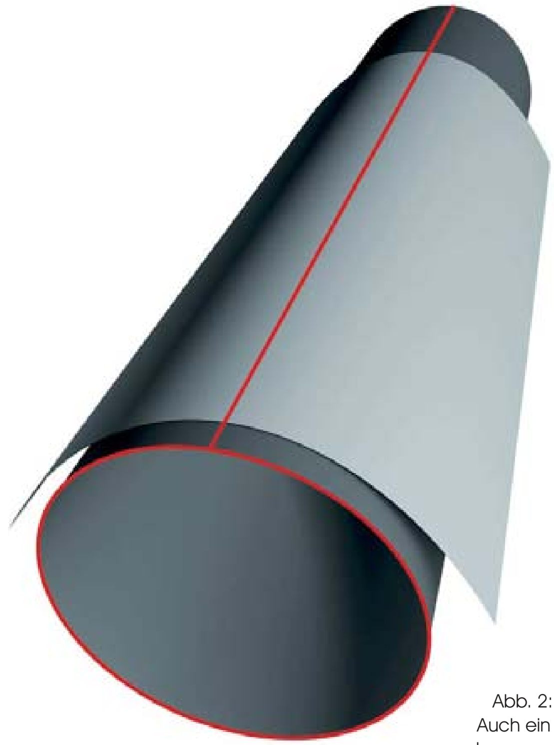


Abb. 2: Auch ein gebogenes Blatt Papier oder eine Zylinderoberfläche hat überall die Skalarkrümmung Null, da man es verzerrungsfrei auf eine flache Ebene abbilden kann. Es ist nämlich nur in eine Richtung gebogen.

Flächen sind Mannigfaltigkeiten der Dimension zwei. Nicht mehr vorstellbar, aber in der Physik, bei Modellierungen und innerhalb der Mathematik wichtig, sind die analogen Objekte höherer Dimension. Diese kann man in der Regel nur noch durch Formeln darstellen. Die zweidimensionale Sphäre ist gegeben als Menge aller Punkte des gewöhnlichen dreidimensionalen Raums mit Koordinaten (x, y, z) und mit $x^2+y^2+z^2=1$.

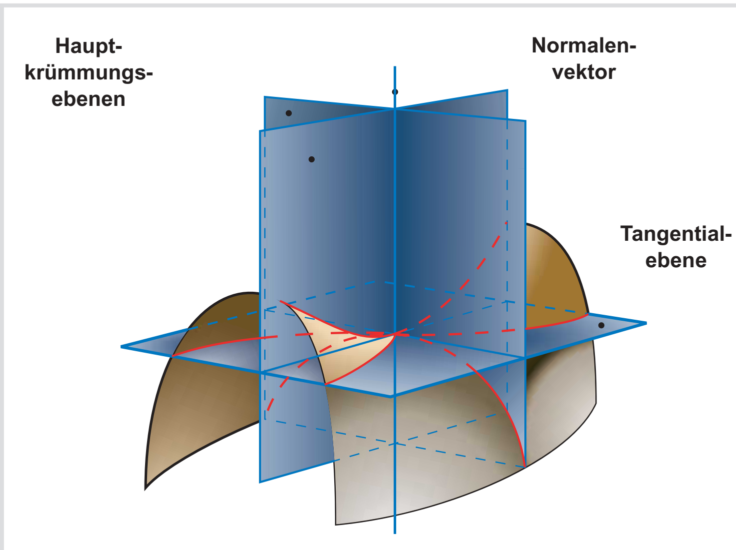


Abb. 3: Die abgebildete Fläche wird Sattelfläche genannt. Hier zeigen die zwei Anschmiegekreise, welche in den Hauptkrümmungsebenen liegen, in entgegengesetzte Richtungen. Daher ist die Skalarkrümmung negativ.

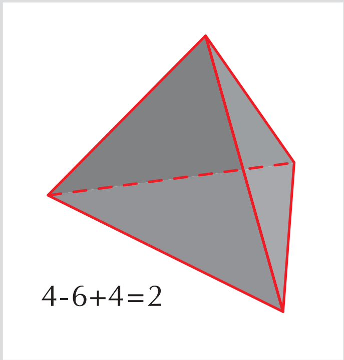


Abb. 4: Ein Tetraeder kann zu einer Sphäre »aufgeblasen« werden. Wegen dieser möglichen Deformation ist die Euler-Charakteristik der Sphäre gleich derjenigen des Tetraeders. Da das Tetraeder aus vier Ecken, sechs Kanten und vier Flächen aufgebaut ist, ergibt sich chi=4-6+4=2.

Entsprechend definiert man die n-dimensionale Sphäre als Menge der »Punkte« $(x_0+x_1,\ldots,x_n)$ des (n+1)-dimensionalen Raums mit $x_0^2+\ldots+x_n^2=1$, und es gibt den n-dimensionalen Torus als Verwandten des zweidimensionalen Torus. Damit kann man weiterhin rechnen, auch der Begriff der Riemannschen Metrik und der Skalarkrümmung überträgt sich.

Es gibt eine spezielle dreidimensionale Mannigfaltigkeit, die wir uns alle sehr gut vorstellen können, nämlich den (unbeschränkten) dreidimensionalen Raum, in dem wir leben. Annähern können wir uns aber auch anderen dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten. Eine zweidimensionale Sphäre erhält man, indem man zwei Scheiben – in verschiedene Richtungen gewölbt – entlang ihrer Ränder zusammenklebt. Entsprechend kann man die dreidimensionale Sphäre aus zwei dreidimensionalen Kugeln erhalten, indem man diese in verschiedene Richtungen einer vierten Dimension wölbt und dann an ihren Rändern zusammenklebt. In der Praxis innerhalb unseres Raums (welcher keine vierte Dimension zulässt) ist dies natürlich nicht möglich; wohl aber in Gedanken. Ähnlich kann man die dreidimensionale Sphäre auch erhalten, wenn man zwei ausgefüllte Rettungsringe (Volltori) entlang der Ränder verklebt. Wie dies zu tun ist, zeigen die Modelle des Göttinger Professors Benno Artmann in Abb. 6.

Höherdimensionale Mannigfaltigkeiten sind keine reine mathematische »Spielerei«. Tatsächlich ist unsere Welt ja dreidimensional, und wenn man die Dimension der Zeit dazu nimmt, sogar vierdimensional. Die allgemeine Relativitätstheorie beschreibt die Welt nun als Riemannsche Mannigfaltigkeit.[3] Die physikalischen Eigenschaften werden durch die Krümmung der Riemannschen Metrik beschrieben. Da wir in Wirklichkeit nur einen kleinen Ausschnitt der Welt beobachten können, ist noch gar nicht ausgemacht, ob die Welt tatsächlich der euklidische Raum ist, oder nicht vielleicht doch eine andere dreidimensionale Mannigfaltigkeit wie beispielsweise die dreidimensionale Sphäre oder der dreidimensionale Torus.

Wichtig ist hier nun die Frage, ob diese Mannigfaltigkeit eine Metrik mit überall positiver Skalarkrümmung zulässt, weil aktuelle Messungen aus der Kosmologie genau solch ein Modell verlangen. (Dies hängt mit der Existenz von »dunkler Energie« zusammen.) Manche Erweiterungen der Relativitätstheorie, insbesondere die Stringtheorie, fordern sogar noch höherdimensionale Mannigfaltigkeiten als die zugrunde liegenden Modelle.

Unabhängig von diesen Motivationen sind wir als Mathematiker neugierig, welche der von uns betrachteten Mannigfaltigkeiten (beliebiger Dimension) Riemannsche Metriken zulassen, sodass die Skalarkrümmung überall positiv ist. Wie wir schon gesehen haben, kann dies bei zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten nur der Fall sein, wenn die Euler-Charakteristik positiv ist. Dies war bei der Sphäre der Fall, nicht aber beim Torus. Gibt es entsprechende Ein-

Bernhard Riemann (1826 – 1846) wurde 1854 mit einem Vortrag über »Grundlagen der Geometrie« habilitiert. Wie auch bei heutigen Habilitationsverfahren hatte er drei Themen zur Auswahl zu stellen. Damals war es üblich, dass die dritte Alternative nie genommen wurde, und Riemann war daher sehr erschrocken, als sein Drittvorschlag »Grundlagen der Geometrie« auf Betreiben von Carl Friedrich Gauß ausgewählt wurde. In kurzer, intensiver Arbeit entstand dann allerdings ein Meisterwerk: Riemann entwickelte die Grundlagen der Theorie der Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension und der allgemeinen Riemannschen Metriken. Genau auf dieser Theorie basieren die allgemeinen Fragestellungen, die in diesem Artikel behandelt werden.

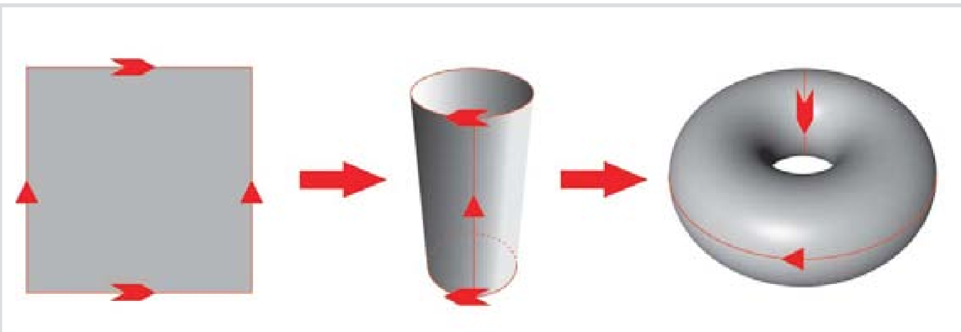


Abb. 5: Einen Torus erhält man, indem man bei einem quadratischen Blatt Papier zunächst die linke mit der rechten Kante verklebt und dann den sich ergebenden oberen Kreis mit dem unteren. Führt man die zweite Verklebung »nur in Gedanken« aus, erhält man eine Riemannsche Metrik auf dem Torus, deren Skalarkrümmung überall Null ist.

3 Und zwar als Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension vier, aber da die Zeit eine Sonderrolle einnimmt, beschränkt man sich hier auf den dreidimensionalen »Raum«-Anteil.

4 Tatsächlich benötigt man hierzu noch zusätzlich eine so genannte Spin-Struktur, die in allen wichtigen Fällen aber auch vorhanden ist. Wir wollen außerdem nur solche Felder betrachten, die nicht überall Null sind.

schränkungen auch in höheren Dimensionen? Dies ist tatsächlich so. Um zu erklären, wie es funktioniert, brauchen wir noch weitere Vorbereitungen.

Zur Physik gehört nicht nur die Beschreibung der Welt selbst, modelliert durch den dreidimensionalen Raum, oder vielleicht eine andere, auch höherdimensionale Mannigfaltigkeit. Daneben benötigt man noch Messgrößen. Dies sind oft so genannte Felder. Ein skalares Feld ordnet einfach jedem Punkt den Wert einer skalaren Messgröße zu. Ein einfaches Beispiel ist die Temperatur. Viele physikalische Größen werden jedoch nicht durch eine einzelne Zahl beschrieben, sondern als Vektoren mit einer Richtung und einer Länge. Der Wind, bestehend aus Windrichtung und Geschwindigkeit, ist eine solche Größe aus der Meteorologie, auch elektrisches und magnetisches Feld sind von dieser Art. Hierbei spricht man allgemein von »Vektorfeldern«.

Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit gibt es nun eine besondere Art von Vektorfeldern: die so genannten harmonischen Spinorfelder[4]. Diese erfüllen eine spezielle Differentialgleichung und spezielle Transformationsformeln. Ihre Existenz hängt von der jeweiligen Mannigfaltigkeit und der Riemannschen Metrik ab. An dieser Stelle ergibt sich nun ein wichtiger Zusammenhang mit der Skalarkrümmung: Die Lichnerowicz-Formel besagt, dass es keine harmonischen Spinorfelder gibt, wenn die Skalarkrümmung überall positiv ist. Dummerweise ändert sich, auch für eine feste zugrunde liegende Mannigfaltigkeit, bei Deformation der Riemannschen Metrik die Menge und Anzahl der harmonischen Spinorfelder.

Analog zur Euler-Charakteristik von Flächen gibt es für höherdimensionale Mannigfaltigkeiten das A-Dach-Geschlecht: eine Zahl, welche nur von der Mannigfaltigkeit – und nicht etwa einer Riemannschen Metrik abhängt – und zudem relativ einfach zu bestimmen ist. Weiter gilt das Atiyah-Singer-Indextheorem, welches besagt, dass das A-Dach-Geschlecht Null ist, wenn es keine Spinorfelder gibt. (Für dieses Theorem haben seine beiden Entdecker den Abel-Preis, die höchstdotierte Auszeichnung für Mathematiker, erhalten.)

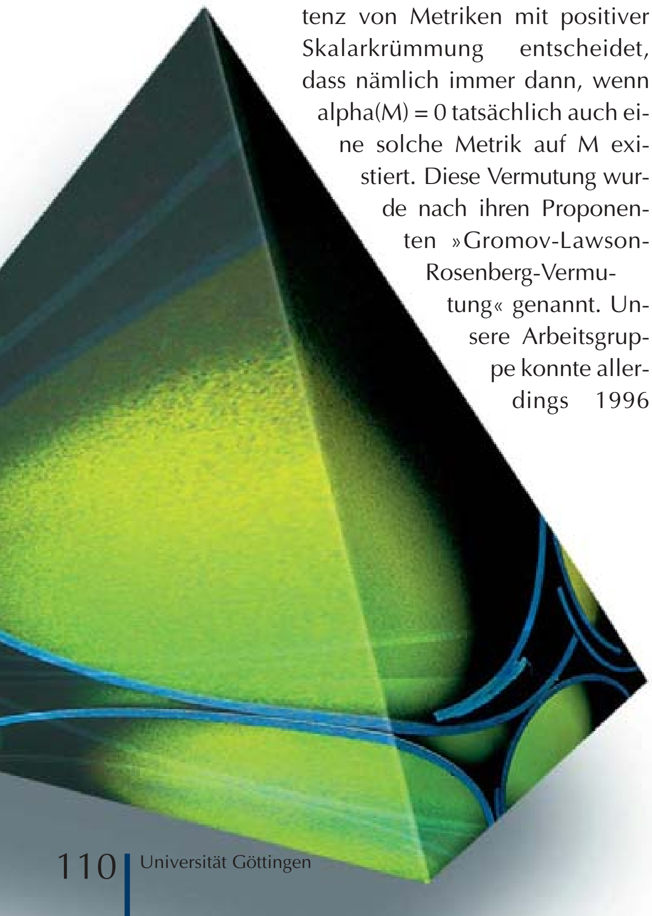
Wir erkennen also zusammenfassend: Auf einer Mannigfaltigkeit mit A-Dach-Geschlecht ungleich Null kann man die Riemannsche Metrik nie so deformieren, dass die Skalarkrümmung überall positiv ist. Denn könnte man dies doch, gäbe es wegen der Lichnerowicz-Formel keine harmonischen Spinorfelder. Dann wäre aber auch das A-Dach-Geschlecht Null, was aber nach Voraussetzung gerade nicht der Fall ist. Betrachtet man den n-dimensionalen Torus, eine n-dimensionale Variante des 2-Torus, so berechnet man leider, dass das A-Dach-Geschlecht den Wert Null hat. Trotzdem gibt es darauf (wie im Fall des 2-dimensionalen Torus) keine Riemannsche Metrik mit positiver Skalarkrümmung. Woher weiß man das?

Abb. 6: Benno Artman setzte die Zerlegung einer zweidimensionalen Sphäre in zwei ausgefüllte Tori künstlerisch um. Die Strukturen deuten an, wie die beiden »Rettungsringe« miteinander verklebt werden müssen. Dies kann innerhalb des dreidimensionalen Raums nicht durchgeführt werden, hierzu benötigt man eine vierte Dimension.

Man kann zusätzliche Symmetrien der betrachteten Mannigfaltigkeit M ausnutzen, um eine Verbesserung, genannt alpha(M), von A-Dach(M) zu definieren. Alpha(M) ist allerdings keine Zahl, sondern hat eine viel kompliziertere Struktur (diese Struktur hängt zudem noch von M ab). Es ist sicher vorstellbar, dass es sich um eine lange Folge von Zahlen handelt. Die Lichnerowicz-Formel gilt auch für alpha(M): Wenn positive Skalarkrümmung vorliegt, verschwindet ganz alpha(M), also jeder einzelne Eintrag der langen Folge von Zahlen. Weiterhin gilt, wie beim Atiyah-Singer-Indexsatz, dass auch alpha(M) nur von der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit abhängt. Und es stellt sich heraus, dass alpha für den n-dimensionalen Torus in jeder Dimension nicht Null ist. Wie weiter oben erläutert, können wir folgern, dass man auf dem n-dimensionalen Torus keine Metrik mit positiver Skalarkrümmung konstruieren kann.

Diese Methode ist so erfolgreich, dass die Mathematiker für eine Weile vermutet hatten, dass alpha(M) komplett über die Existenz von Metriken mit positiver Skalarkrümmung entscheidet, dass nämlich immer dann, wenn alpha(M) = 0 tatsächlich auch eine solche Metrik auf M existiert. Diese Vermutung wurde nach ihren Proponenten »Gromov-Lawson-Rosenberg-Vermutung« genannt. Unsere Arbeitsgruppe konnte allerdings 1996 eine Mannigfaltigkeit M konstruieren, die einerseits alpha(M)=0 erfüllt. Andererseits, und dies war die schwierigere Aufgabe, konnten wir mit anderen Methoden zeigen, dass diese spezielle Mannigfaltigkeit nicht mit einer Riemannschen Metrik mit positiver Skalarkrümmung versehen werden kann. Damit war die Gromov-Lawson-Rosenberg-Vermutung widerlegt.

Die Invariante alpha(M) ist in Einzelfällen gut verstanden. In vielen Situationen ist sie jedoch ein echtes Mysterium. Oft ist noch nicht einmal klar, welche Struktur alpha(M) hat. Die Frage ist ungefähr, aus wie vielen und welcher Art von Zahlen die oben erwähnte Folge besteht. Dies hängt von M ab. Eine Antwort darauf gibt die Baum-Connes-Vermutung. Es ist ein aktives Forschungsthema unserer Arbeitsgruppe, diese Vermutung in Spezialfällen zu beweisen. Aber auch alpha(M) selbst ist viel komplizierter als beispielsweise das A-Dach-Geschlecht. In der Regel kann man einer gegebenen Mannigfaltigkeit M nicht ansehen, ob alpha(M) verschieden von Null ist. Genau das wüssten wir gerne, denn dann kann man folgern, dass die Mannigfaltigkeit M keine Metrik mit positiver Skalarkrümmung zulässt. Unsere Gruppe sucht deshalb einfache Kriterien dafür, dass alpha(M) ungleich Null ist. Dabei werden Methoden aus Analysis, Geometrie und Algebra kombiniert.



Zusammenfassung

Wir erforschen die Frage, welche Mannigfaltigkeiten eine Riemannsche Metrik mit positiver Skalarkrümmung zulassen und welche nicht. Ausgehend von praktischen Aspekten der Geodäsie und motiviert von der Frage der Relativitätstheoretiker und Stringtheoretiker, welche Mannigfaltigkeiten ihren Modellen zugrunde gelegt werden können, hat sich hier ein faszinierendes Gebiet der Geometrie entwickelt. Von Mathematikern wird diese Frage ganz abstrakt untersucht und unter Benutzung verschiedenster Methoden in vielen Fällen gelöst. Unsere Gruppe in Göttingen ist stolz darauf, dazu einige wichtige Beiträge geleistet zu haben.

Prof. Dr. Thomas Schick, Jahrgang 1969, studierte Mathematik und Physik an der Universität Mainz. Sein Studium schloss er 1993 mit dem Diplom in Mathematik ab. Im Jahr 1996 wurde er in Mainz mit einer Arbeit über »Analysis on non-compact manifolds of bounded geometry« promoviert, die mit dem Promotionspreis der Universität Mainz ausgezeichnet wurde. Von 1996 bis 2001 arbeitete Thomas Schick als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universität Münster. Gefördert vom Deutschen Akademischen Austauschdienst (DAAD) und der National Science Foundation der USA unterbrach er diese Tätigkeit für einen Forschungsaufenthalt an der Pennsylvania State University von 1998 bis 2000. Nach seiner Rückkehr habilitierte sich Thomas Schick 2000 in Münster für das Fach Mathematik. 2001 nahm er einen Ruf an die Universität Göttingen als Professor für Geometrie am Mathematischen Institut an. Er war Gastprofessor in Marseille und Clermont-Ferrand (Frankreich). Prof. Schick ist Sprecher des Graduiertenkollegs »Gruppen und Geometrie« (seit 2002) sowie stellvertretender Sprecher des Graduiertenkollegs »Modern mathematical methods in quantum physics«. Zudem ist er Sprecher des Courant Forschungszentrums »Strukturen höherer Ordnung in der Mathematik«. Seine Forschungsschwerpunkte sind Geometrie und Topologie.

Geographers have observed that it is impossible to create maps of the earth without distortions. The reason for this is the curvature of the surface. Gauss was one of the first to study this phenomenon and invented the scalar curvature (also called Gaussian curvature) to measure it.

Mathematically, a surface is a two-dimensional, smooth object without boundary. An example is a sphere or a torus (the surface of a doughnut). The curvature of a surface at a given point is determined by the radii of two orthogonal circles which are optimally adapted to the surface. This description uses the exterior of the surface. Gauss proved in his famous Theorema Egregium that one can actually determine the scalar curvature internally: if the circumference of a small circle of a given radius around the point is smaller than in the Euclidean plane, then the surface is positively curved; if it is larger, then the scalar curvature is negative (for a precise formula, one has to pass to a suitable limit here).

The geometry of distances is mathematically encoded in the notion of Riemannian manifold. Given a surface, one can deform it, which means one changes the Riemannian metric. However, one observes that the shape of the manifold imposes restrictions.

For example, one can not deform the metric on a sphere such that its curvature is zero everywhere. This follows from the Gauss-Bonnet theorem: the average of the curvatures at all points is the Euler characteristic. The latter does not depend on the Riemannian metric and is equal to two for the sphere. If the curvatures were all zero, so would be their average, which however has to be two. Similarly, a torus cannot carry a metric whose curvature is positive at all points, as the Euler characteristic here is zero.

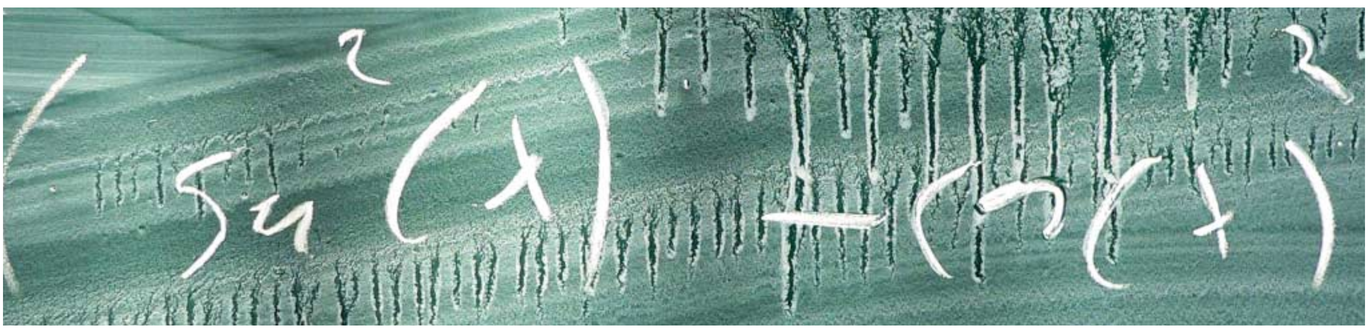
Mathematicians now also study higher dimensional variants of these surfaces (called manifolds). They carry Riemannian metrics, and the notion of scalar curvature generalizes, as well. These higher dimensional manifolds can only be described using formulas. However, our world is certainly three-dimensional, if one includes time even four-dimensional, and some physical models use much higher dimensions, as well. It is not yet clear which manifolds best describe the physical world, but there are indications that it is important that they carry a metric which has at all points a positive scalar curvature.

As in the case of surfaces, there are obstructions to the existence of a metric with positive scalar curvature on a given manifold. The most prominent one is the A-hat genus, which is a generalization of the Euler characteristic to manifolds of higher dimension. It vanishes if a manifold admits a metric with positive scalar curvature. This uses the Atiyah-Singer index theorem (a variant of the Gauss-Bonnet theorem for higher dimensional manifolds) which relates the A-hat genus to the existence of harmonic spinor fields. Geometry, on the other hand, shows that no such spinor fields can exist if the scalar curvature is at all points positive.

The A-hat genus is not strong enough to cover all relevant cases. For example, it is zero for higher dimensional tori. Using additional symmetries, one can construct a refined variant of the A-hat genus (called the alpha-genus). This is not a number, but has a much more complicated structure – like a sequence of many numbers, depending on the manifold one starts with.

Mathematicians then conjectured that this alpha-genus is strong enough to completely determine whether a manifold M carries a metric of positive scalar curvature or not. In earlier work, we could show that this is not true in general (by constructing a counterexample). However, for many classes of manifolds it is actually true, and we are currently involved in research to check this in new cases. This also requires understanding the structure of the alpha-genus better (meaning describing approximately how many numbers, and of which kind, the above-mentioned sequence contains, depending on the manifold M). The so-called Baum-Connes conjecture describes the structure of the alpha-genus, and we are involved in research to prove this conjecture, at least in special cases.

Finally, also the alpha-genus itself is quite mysterious and hard to compute. Our group therefore studies geometric conditions which immediately imply that it is not zero.



Kein Tempolimit für die Datenautobahn

Visionen für das Internet der Zukunft

Xiaoming Fu, Dieter Hogrefe, Henning Schulzrinne

Während eine Vielzahl von Standardanwendungen der Internettechnologie fest in unser Arbeits- und Alltagsleben integriert ist, arbeiten Forscher intensiv an neuen Anwendungen, verbesserten Sicherheitsstandards und benutzerfreundlicheren Diensten. Am Göttinger Institut für Informatik kamen im Juni diesen Jahres mit Unterstützung des Deutschen Akademischen Austauschdienstes (DAAD) etwa 20 Wissenschaftler der Columbia University, New York, und der Georg-August-Universität zusammen, um sich über den Stand der Forschung im Bereich Internettechnologie auszutauschen. Auf dem »1st Columbia-Göttingen Workshop on Internet Research« wurden auch für die Göttinger Forschung wichtige Themen der Internettechnologie präsentiert, die von drahtlosen Technologien und Mobilkommunikation über Verkehrsanalyse und Stauvermeidungstechnologien, über Overlay und Peer-to-Peer-Netze bis hin zu Voice over IP und ortsbasierten Anwendungen reichten. Der Beitrag gibt einen Einblick in den Stand wichtiger Bereiche der Technik und stimuliert die Diskussion über Visionen des zukünftigen Internets.

Foto: Axel Warner, Osnabrück

Zunächst werden die Prinzipien einer neuen Form eines Kerninternetdienstes im Zusammenhang mit Voice over IP und den dazugehörigen derzeitigen Forschungsthemen präsentiert. Anschließend diskutieren wir neue Transportprotokolle, Stauvermeidungstechniken und Netzarchitekturen, um zum Schluss des Beitrags auf das sehr aktuelle Thema Sicherheit im Internet, insbesondere in mobilen Szenarien, einzugehen.

Voice over IP – mehr als die Kopie des analogen Telefons

Voice over IP (VoIP) ist mittlerweile ein Kerninternetdienst, der die traditionellen Formen der Telefondienste sowohl im privaten als auch im geschäftlichen Bereich zunehmend ersetzt. Allerdings zielen viele der derzeitigen kommerziellen VoIP-Dienste darauf ab, die traditionellen, hundert Jahre alten Telefondienste in einer neuen Technologie eins zu eins abzubilden, statt die volle Bandbreite der Möglichkeiten eines Internet-basierten Dienstes zu nutzen. Dabei kann Voice over IP so eingesetzt werden, dass der Benutzer zukünftig mehr Kontrolle über seine Erreichbarkeit hat und flexiblere Dienste für sich nutzen kann. Vier Möglichkeiten für eine attraktivere Echtzeitkommunikation seien skizziert: Präsenzkontrolle, Programmierbarkeit, Sitzungsmobilität und ortsbasierte Dienste.

Präsenzkontrolle erlaubt dem Benutzer zu bestimmen, ob er kontinuierlich auf einer Subskriptionsbasis oder nur nach Bedarf verfügbar ist. Über die Präsenzkontrolle kann darüber hinaus bestimmt werden, ob in einer bestimmten Situation eine Sprachkommunikation oder eine textuelle Kommunikation geeigneter ist, um jemanden zu erreichen.

Statt sich auf die von den Geräteherstellern oder Netzbetreibern angebotenen Dienste zu beschränken, erlaubt die Benutzerprogrammierbarkeit, Geräte und Dienste den persönlichen Bedürfnissen anzupassen. Das VoIP-System kann in einen größeren Zusammenhang eingebunden werden,

in dem Verzeichnisdienste, Web-Dienste oder soziale Netze und Sensoren zur Verfügung stehen. Ein soziales Netz könnte zum Beispiel Auskunft darüber geben, wie vertrauenswürdig ein Shop ist, den man gerade anruft. Sensoren könnten den Kommunikationsvorgang von weiteren Einflüssen abhängig machen, zum Beispiel im Winter bei niedriger Temperatur die Zeit des Klingelns verlängern, bevor auf Anrufbeantworter umgeschaltet wird, um so dem Benutzer die Möglichkeit zu geben, die Handschuhe auszuziehen und in den zahlreichen Kleidungsstücken nach dem Telefon zu suchen. Die Programmierbarkeit der VoIP-Architektur ermöglicht es, maßgeschneiderte Anwendungen für Einrichtungen wie beispielsweise Hotels oder Arztpraxen zu realisieren, ohne die VoIP-Kerninfrastruktur und ihre Protokolle zu modifizieren.

Mit der Sitzungsmobilität können die laufenden Dienste und Telefongespräche unterbrechungsfrei von einem Gerät zu einem anderen übertragen werden. Beispielsweise könnte so ein laufendes Videotelefonat unterbrechungsfrei von einem Mobiltelefon auf einen Desktopcomputer mit Großbildschirm überführt werden. Hierbei gibt es allerdings noch erhebliche Herausforderungen zu bewältigen, insbesondere wenn ein plattformübergreifender Übergang, wie beispielsweise zwischen zellularer UMTS-Infrastruktur und SIP-Infrastruktur, stattfindet.

Ortsbasierte Dienste berücksichtigen geographische Determinanten der Kommunikation. Die Dienste können an die Gegebenheiten des Aufenthaltsortes der Kommunizierenden angepasst werden. Beispielsweise könnte so ein Anruf, der den Gesprächspartner zu nächtlicher Stunde in Japan erreichen würde, automatisch auf einen menügesteuerten Anrufbeantworter umgeleitet werden. Das neue location-to-service translation protocol (LoST der IETF) ist eine solche Technologie. Dieses Protokoll wurde beispielsweise schon dafür eingesetzt, eingehende Notrufe an den nächstgelegenen öffentlichen Notfalldienst weiterzuleiten – die Technologie ist dabei in der Lage, ortsspezifische Informationen auszuwerten und zu nutzen.

Staukontrolle, Transport- und Routingprotokolle

Ende-zu-Ende-Staukontrolle, Routing und Transportprotokolle sind in der Praxis weit verbreitet und tragen zum Erfolg des Internets bei. Um den neuen Anforderungen an Netzdienste und Anwendungen Genüge zu tun, wurden Dienstgüter- und Verkehrsflussmechanismen eingeführt, allerdings nur in eingeschränktem Umfang in Form von Differentiated Services in den Zugangsnetzen und Multi-Protocol Label Switching (MPLS) zwischen Domänen. Das Aufkommen von Pfaddiversität und neuen breitbandigen Formen der Netznutzung, zum Beispiel Internetfernsehen, erfordert allerdings neue Forschungsanstrengungen in Richtung Multicastnutzung und Staukontrolle auf der Netzschicht. Folgendes sind aktuelle Forschungsrichtungen.

Durch die Einführung von Pfaddiversität werden reichhaltigere Transportdienste sowohl für das Netz selbst als auch für die Endgeräte ermöglicht. Mit Pfaddiversität werden die Datenpakete eines Datenstroms auf verschiedene Pfade durch das Internet aufgeteilt. Dadurch kann man robustere und belastbarere Kommunikationsverbindungen herstellen. Diese Aspekte sind beispielsweise für Peer-to-Peer-Netze und Multihop-Adhoc-Netze interessant, aber auch für Resilient Overlay Network (RON) und GIST Overlay Network Extension (GONE) und die jüngste IETF-Initiative für Techniques for Advanced Network Applications (TANA).

Eine weitere aktuelle Forschungsrichtung sind neben dem nativen IP-Multicast die Peer-to-Peer und Overlay-Multicast-Netze. Internetfernsehen (IPTV) und andere gruppenorientierte Kommunikationsanwendungen stellen neue Herausforderungen an die effiziente Bandbreitennutzung in den Netzen. Während das native IP-Multicast, also die Vervielfältigung der Datenpakete für die verschiedenen Empfänger auf Netzebene, zunächst als Lösung nahe liegt, zieht es allerdings eine erhebliche Modifikation der Netzinfrastruktur nach sich. Dagegen sind zwar Peer-to-Peer- und Overlay-Lösungen weniger gut untersucht, haben aber eine bessere Chance der schnellen Verbreitung im weltweiten Internet, weil sie ohne Modifikation der Netzinfrastruktur auskommen.

Bei heutigen Internetanwendungen ist es immer noch möglich, dass Daten, die von Göttingern nach Kassel übertragen werden sollen, ihren Weg über Datennetze in den USA nehmen. Um hier unnötigen Netzverkehr zu vermeiden und Kosteneffizienz zu erreichen, beschäftigen sich neuere Untersuchungen auch mit der Integration von geographischer Ortsinformation in das Routing zwischen verschiedenen Internetanbieter.

Netz der Zukunft

Unter den Internetforschern wird in jüngster Zeit eine Debatte über die evolutionäre Weiterentwicklung des Internets einerseits und den so genannten Clean-Slate-Approach andrerseits geführt, wobei der Clean-Slate-Approach am besten als Tabula-rasa-Ansatz beschrieben werden kann, der radikale Neuerungen fordert. Die Motivation für Clean-Slate ist, dass die evolutionäre Herangehensweise zwar einige Verbesserungen in Form von beispielsweise Application Layer Multicast, leistungssteigernden Proxies und belastbaren Overlays bringt, aber nicht die fundamentale technische Architektur des Internets berührt. Einige dieser Tabula-rasa-Projekte sind beispielsweise Network Virtualization und PLANET-Lab Projekte der Princeton und der Washington University, das Clean State Projekt der Stanford University, sowie EU FP7 Trilogy und 4Ward, die partiell von den drei Initiativen Future Internet Network Design (US FIND), Global Experimentation for Network Instantiation (GENI) und Future Internet Research and Experimentation (EU FIRE) unterstützt werden. Es ist allerdings zu erwarten, dass trotz der Notwendigkeit, neue Internetarchitekturen zu untersuchen, jede grundsätzliche Änderung am Internet weitläufige Experimente erfordert. Das stellt im Tagesbetrieb eine schwierige Herausforderung dar. Daher ist es auf absehbare Zeit wahrscheinlicher, dass evolutionäre Weiterentwicklungen leichter in die Praxis umgesetzt werden können.

Netzcodierung

Netzcodierung, oder im englischen Fachbegriff network coding (NC), ist eine neue Technologie zur Effizienzsteigerung des Internets, die insbesondere in drahtlosen Netzen erfolgversprechend ist. Netzcodierung erlaubt es, Datenpakete an Zwischenknoten zu bündeln, um den Datenverkehr zu optimieren. Auf diese Weise werden zwar die »Pakete« an viele Empfänger gleichzeitig geschickt, aber nur der legitime Empfänger eines Paketes kann dieses auch öffnen. Netzcodierung eröffnet ein interessantes neues Forschungsfeld. Während bereits einige Arbeiten zum Design von Netzcodierungsprotokollen stattgefunden haben, muss die praktische Bedeutung für die dadurch ermögliche Leistungssteigerung in realen Netzszenarien erforscht werden. Kuo und andere beschreiben, wie Netzcodierung in Drahtlosnetzen den Durchsatz für bestimmte Anwendungen erheblich erhöhen kann, selbst in verlustreichen Umgebungen. Es konnte gezeigt werden, dass das Herunterladen von Dateien und die Fehlerrobustheit des Systems mit Hilfe von Netzcodierung signifikant verbessert werden können. Es müssen allerdings noch die Auswirkungen der NC-spezifischen Parameter wie zum Beispiel der Typ der Codes untersucht werden. In neueren Arbeiten wird nun auch die Netzcodierung im Zusammenhang mit Sensornetzen und deren Energiemanagement erforscht. Während das Kerninternet voraussichtlich nicht so bald im Hinblick auf Netzcodierung modifiziert werden kann, wird NC im Zusammenhang mit Peer-to-Peer und Drahtlosnetzen interessant, da in diesen Technologien neue Techniken leichter implementiert werden können.

Sicherheit in drahtlosen und Mobilkommunikationsnetzen

Die Sicherheit in Mobilkommunikationsnetzen ist gut erforscht und in die Praxis umgesetzt, sofern sich der mobile Nutzer nur im Netz eines einzigen Netzbetreibers mit einer einzigen Zugangs-

technologie – beispielsweise GSM – bewegt, oder nur ein einziger Zugangspunkt im nomadischen Sinne genutzt wird, also zum Beispiel während eines Telefongesprächs kein Wechsel der Geräte oder der Netze stattfindet. Als nomadisch bezeichnet man ein Benutzerverhalten, bei dem sich der Benutzer während des Kommunikationsvorgangs nicht wesentlich bewegt, sondern eine Ortsverlegung nur zwischen verschiedenen Kommunikationsvorgängen stattfindet. Ein einfaches Beispiel ist die Nutzung des Internets in den Hotels während einer Reise, aber nicht während der Busfahrt selbst.

Im ersten Fall ist mit den standardisierten Verfahren zur Benutzerauthentifizierung und Verschlüsselung auf der Luftschnittstelle, den so genannten A3-, A5- und A8-Algorithmen, ein Stand der Technik erreicht, zu dem es keine bekannten Angriffe gibt. Im zweiten Fall, der nomadischen Internetnutzung, ist mit WPA2, EAP/802.1x und IPSec ebenfalls ein Stand erreicht, der als sicher gelten kann, sofern ausreichend lange Schlüssel verwendet werden.

Die Herausforderungen beim Thema Sicherheit im Internet liegen heute in anderen Bereichen, zu denen die folgenden drei zählen, die am Institut für Informatik in Göttingen untersucht werden: Zunächst ist die oben genannte Einschränkung, Beschränkung auf einen Netzbetreiber oder nomadischer Netzzugang, aus heutiger Sicht kein zukunftsfähiges Szenario mehr. Der Internetzugang wird

Zentrum für Informatik

(red.) Das Zentrum für Informatik der Georg-August-Universität Göttingen wurde im Jahr 2002 mit dem Ziel gegründet, Forschung und Lehre im Bereich der Informatik und ihrer Anwendungen zu fördern. Es ist interdisziplinär und fakultätsübergreifend organisiert. Das Zentrum führt Lehrveranstaltungen zur Informatik und ihren Anwendungsfächern durch und koordiniert insbesondere die Studienangebote des Bachelor- und des Master-Studiengangs »Angewandte Informatik«. Es organisiert Forschungsprojekte und fördert die Zusammenarbeit mit wissenschaftlichen Einrichtungen sowie Firmen aus der Region. Die Universität erhält insbesondere bei der Einführung neuer informatikbezogener Lehrinhalte Unterstützung durch das Zentrum, das auch berufsbegleitende Weiterbildungsangebote durchführt. Außerdem laufen am Zentrum für Informatik die Aktivitäten eines Projektes für Schülerstudierende zusammen: Schüler verschiedener Göttinger Gymnasien absolvieren erfolgreich Lehrveranstaltungen der Universität im Bereich Informatik. Die erbrachten Leistungen werden im Studium anerkannt. Derzeit wird mit Förderung des Landes Niedersachsen am Zentrum für Informatik ein neues englischsprachiges Angebot vorbereitet: Gemeinsam mit den Universitäten Hannover, Braunschweig und Clausthal wird der Masterstudiengang »Internet-technology and Information Systems« konzipiert.

Eine Vielzahl von Einrichtungen der Universität Göttingen sind unter dem Dach des Zentrums für Informatik zusammengeführt und koordinieren ihre Aktivitäten in Forschung und Lehre. Es sind die Institute der Fakultät für Mathematik und Informatik, das Institut für Informatik, die Gesellschaft für wissenschaftliche Datenverarbeitung mbH Göttingen (GWDG) sowie Einrichtungen aus den Bereichen Bio- und Medizininformatik (Biologische Fakultät, Medizinische Fakultät), Wirtschaftsinformatik (Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät), Kartographie, GIS und Fernerkundung (Fakultät für Geowissenschaften und Geographie), Forstliche Biometrie (Fakultät für Forstwissenschaften und Waldökologie) und Rechtswissenschaften (Juristische Fakultät). Sprecher des Zentrums ist der Informatiker Prof. Dr. Dieter Hogrefe.

heute von einer Vielzahl von Anbietern und Technologien gewährt. An jedem physischen Ort gibt es in der Regel eine oder mehrere Zugangsmöglichkeiten von unterschiedlichen Anbietern, zwischen denen gewählt werden kann. Dieser Trend verstärkt sich in der Zukunft durch neu hinzukommende Technologien wie zum Beispiel WiMAX. Bei einem Ortswechsel wird es zukünftig immer wahrscheinlicher, dass an einem neu ereichten Zugangspunkt ein anderer Anbieter und sogar eine andere Technologie für den Nutzer günstiger ist als am alten Standort. Aus diesem so genannten Interdomänen-Handover ergeben sich jedoch erhebliche Sicherheitsfragen, insbesondere dann, wenn das Handover in Millisekunden stattfinden muss, um eine bestehende Kommunikationsverbindung unterbrechungsfrei aufrechterhalten zu können. Im EU-Projekt »Daidalos« werden unter anderem zusammen mit rund 40 weiteren Partnern solche neuen Szenarien untersucht und Lösungen erarbeitet.

Ein zweiter Bereich sind die mobilen Ad-hoc-Netze, zum Beispiel in Form von Sensornetzen. Darunter versteht man autonom arbeitende und sich selbst organisierende Netze aus kleinsten Rechnerknoten mit Sensoren, für die es vielfältige Anwendungsmöglichkeiten gibt. Insbesondere in der Umweltbeobachtung wird den Sensornetzen großes Potenzial zugesprochen. Wenn man davon ausgeht, dass solche kleinen Sensorknoten zukünftig kilometerlange Gas- und Ölleitungen beobachten und auf Schadstellen kontrollieren, dann wird klar, dass die Sicherheit solcher Netze ein wichtiger Aspekt ist. Da sich die Ad-hoc-Netze selbst organisieren, sind neue Formen des Angriffs denkbar. »Hackerknoten« könnten die Netze infiltrieren, den Verkehr beobachten und manipulieren, oder auch nur dafür sorgen, dass die »guten« Sensorknoten absichtlich so stark belastet werden, dass ihre spärlichen Energievorräte binnen kurzer Zeit verbraucht sind. Derzeitige Forschungsansätze betrachten zum Beispiel die Möglichkeit des anonymisierten Routings. Dadurch kann verhindert werden, dass ein Knoten allein Kenntnis von einer kompletten Route über mehrere »Hops« erlangt. Somit ist das Störpotenzial möglicher schadhafter Knoten stark eingeschränkt. Diese und weitere Szenarien stellen neue Herausforderungen an die Internettechnologie dar und bieten interessante Forschungsfelder.

Eine weitere Herausforderung an die sichere Internetnutzung, sei sie mobil oder stationär, stellt die sogenannte »weiche« Sicherheit – im englischen Fachbegriff Soft Security genannt – dar. Unter »harter« Sicherheit fasst man die herkömmlichen Mechanismen zur Benutzerauthentifizierung oder Verschlüsselung zusammen. Im Wesentlichen werden dadurch Datenbestände vor unberechtigtem Zugriff und Manipulation geschützt sowie abhörsichere Kommunikation ermöglicht. Was nützt allerdings die sicherste Kommunikationsverbindung, wenn der Kommunikationspartner ein Betrüger ist? Die weiter gehende Fragestellung ist die nach der Vertrauenswürdigkeit und Reputation der im Internet agierenden Instanzen. In den letzten Jahren sind bereits viele »Vertrauens- und Reputationsnetze« erprobt worden, die von Amazon, eBay und weiteren Anbietern betrieben werden. Gleichzeitig jedoch wird auch intensiv nach Manipulationsmöglichkeiten gesucht. Die Auswirkungen von manipulierter Reputation und ungerechtfertigtem Vertrauen sind ökonomisch durchaus bedeutsam, so dass sich hier ein neues interessantes und wichtiges Forschungsfeld auftut.

Schlussbemerkung

Das Internet, das sich aus einem rein akademischen Datennetz entwickelt hat, bietet heute eine Menge von Möglichkeiten wie Voice over IP und Multimediadatenaustausch. Während die gegenwärtige Internetarchitektur durch Clean-Slate-Alternativen und neue Paradigmen wie Netzcodierung in Frage gestellt wird, werden aus verschiedenen Gründen voraussichtlich evolutionäre Technologien, die die Internetarchitektur nicht grundsätzlich umstoßen, einen größeren Einfluss auf die Weiterentwicklung haben. Daneben zeigt sich, dass mit der zunehmenden Nutzung des Internets bei neuen Anwendungen Sicherheitsaspekte wichtig werden, insbesondere in mobilen Szenarien.

Literatur (Auswahl):

H. Schulzrinne and J. Rosenberg, Internet Telephony: architecture and protocols – an IETF perspective, Computer Networks, 31(3): 237-255, Feb 1999

J. Rosenberg, SIMPLE made Simple: An Overview of the IETF Specifications for Instant Messaging and Presence using the Session Initiation Protocol (SIP), IETF draft-ietf-simple-simple-03, July 2008.

R. Shacham, H. Schulzrinne, S. Thakolsri and W. Kellerer, Session Initiation Protocol(SIP) Session Mobility, IETF draft-shacham-sipping-session-mobility-05, IETF, Nov 2007.

A. Forte and H. Schulzrinne, Classification of Location-based Services, IETF draft-forte-ecrit-service-classification-00, May 2008.

T. Hardie, A. Newton, and H. Schulzrinne, H. Tschofenig, LoST: A Location-to-Service Translation Protocol, IETF RFC 5222, Aug 2008.

J. Lei, X. Fu, and D. Hogrefe, DMMP: A New Dynamic Mesh-based Overlay Multicast Protocol Framework, IEEE 1st Workshop on Peer-to-Peer Multicasting (P2PM 2007).

F.-C. Kuo, K. Tan, X.-Y. Li, J. Zhang, and X. Fu, Network coding-aware fair opportunistic scheduling in wireless networks, IFI Tech. Report, University of Göttingen, August 2008

O. Alfandi, H. Brosenne, P. Chamuczynski, D. Hogrefe, C. Werner, Performance Evaluation of PANA Pre-Authentication and PANA Context Transfer, in Proceedings of the Fourth international Conference on Wireless and Mobile Communications (ICWMC, July 27 – August 01, 2008). IEEE Computer Society, 2008

Selected research fields on Internet technologies as well as open issues and ongoing topics are presented as a result of the discussions in the 1st Columbia-Göttingen Workshop on Internet Research. Following a top-down approach, this article is organized as follows: First we discuss a new type of core Internet service, VoIP, including its principles, current research, and future directions. This section describes the core principles of VoIP and how VoIP can be enhanced to provide more user control over reachability, more flexible services and transparent mobility for tomorrow. We then present the transport protocols, congestion control and future network architectures. The emergence of path diversity and new network usage scenarios (e.g. data centres, IPTV) is expected to enable a number of new research directions utilizing not only path diversity but also multicast and network-level congestion control. After that we discuss another emerging topic, network coding. Network coding (NC) is a new technology to allow and encourage mixing of data at intermediate network nodes. This can result in significant performance gains, in particular in wireless networks. This section is followed by selected issues related to security in mobile wireless networks. While the security in single service provider scenarios is well understood and technology is in place that well protects the users, the security in multi-service provider environments is a major challenge. That is even more the case when we move from nomadic mobility to full mobility. Another challenging topic is the security of ad hoc networks such as sensor networks, that are used, for example, in home automation. Finally we discuss the issue of soft security, i.e. the usage of social networks to gain trust in a computing and communication environment.

Prof. Dr. Dieter Hogrefe, Jahrgang 1958, studierte Mathematik und Informatik an der Universität Hannover und wurde 1985 dort promoviert. Von 1983 bis 1986 war er als Mitarbeiter im Forschungszentrum der Siemens AG in München tätig. Nach Professuren an den Universitäten Dortmund, Bern und Lübeck sowie längeren Gastaufenthalten an der UC Berkeley und der Hamilton University (beide USA) folgte er 2002 einem Ruf an die Georg-August-Universität Göttingen auf eine Professur für Praktische Informatik. Prof. Hogrefe leitet in Göttingen das Institut für Informatik und ist Sprecher des Zentrums für Informatik. Seine Forschungsinteressen liegen im Bereich der Computernetze, mit Schwerpunkten in der mobile Kommunikation und Kommunikationssicherheit. Er hat zahlreiche Bücher und Publikationen zur Internettechnologie veröffentlicht. Prof. Hogrefe ist seit 1995 Chairman des Technical Committee Methods for Testing and Specification im European Telecommunication Standards Institute (ETSI)

Prof. Dr. Henning Schulzrinne, Jahrgang 1961, studierte an den Universitäten Darmstadt (Vordiplom), Cincinatti (M.Sc) und Amherst in Massachusetts (Ph.D). Von 1992 bis 1994 war er bei AT&T Bell Laboratories in Murray Hill, New Jersey (USA), und von 1994 bis 1996 bei GMD Fokus in Berlin beschäftigt. Seit 1996 ist er Professor und derzeit Direktor des Computer Science Department an der Columbia University, New York (USA). Sein besonderes Interesse gilt Fragen der Dienstqualität von Echtzeitdiensten im Internet. Er hat an der Entwicklung des Echtzeittransportprotokolls RTP und der Protokolle SIP and RTSP mitgewirkt. Prof. Schulzrinne ist Editor des Journal of Communications and Networks, der IEEE Transactions on Image Processing und der IEEE/ACM Transactions on Networking und war früher Editor des IEEE Internet Computing Magazine. Er leitet das IEEE Communications Society Technical Committee on Computer Communications und ist Vorsitzender der Programmausschüsse der Konferenzen Global Internet, Infocom, NOSSDAV und IPtel. Im Augenblick ist er Mitglied des IAB (Internet Architecture Board).

Prof. Dr. Xiaoming Fu, Jahrgang 1973, studierte Computerwissenschaften an der Tsinghua University in Peking (China) und schloss seine Studienzeit im Jahr 2000 mit dem Ph.D. ab. Als Forschungsassistent war er anschließend an der TU Berlin tätig und wechselte im Jahr 2002 an die Universität Göttingen. Nach mehreren Rufen unter anderem an Universitäten in Schweden und Dänemark nahm er 2007 einen Ruf an die Georgia Augusta auf eine C3-Professur an. Seine Forschungsinteressen umfassen Netzwerkarchitekturen, mobile Kommunikation und Service Overlays. Er war maßgeblich an der Ausrichtung internationaler Konferenzen – INFOCOM, ICNP, ICDCS und MobiArch – beteiligt. Prof. Fu engagiert sich als Herausgeber von Sonderpublikationen und als technischer Berater in der IEEE Communications Society und ist Mitglied des Herausgebergremiums des Elsevier Computer Communications Journal.

Informationsspezialisten am Werk

Die Göttinger Universitätsbibliothek und ihr Sondersammelgebiet »Reine Mathematik«

Katharina Habermann

An der Georgia Augusta als Gründung der Aufklärungszeit spielte die Mathematik als Grundlagenwissenschaft von Anfang an eine entscheidende Rolle. Bedeutende Mathematiker, die in Göttingen lehrten und forschten, bemühten sich auch um eine verbesserte Ausstattung der Bibliotheken. Besonders hervorzuheben sind die Aktivitäten Felix Kleins (1849 – 1925), dem die Gründung des Mathematischen Lesezimmers im Jahre 1886 zu verdanken ist und der sich intensiv um die Mehrung der mathematischen Literatur der Universitätsbibliothek und die dafür notwendigen finanziellen Mittel bemühte. Heute sind die Bestände an mathematischer Literatur und Medien enorm gewachsen. Fachleute, die in der Mathematik ebenso bewandert sind wie in den modernen Bibliotheks- und Informationswissenschaften, stehen den Wissenschaftlern zur Seite, um ihnen einen Pfad durch die beeindruckenden aktuellen und historischen Bestände der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen (SUB) zu weisen. Denn nur wer in der Mathematik weiß, welche Fragestellung bereits wie und von wem bearbeitet wurde, kann sich gesichert neuen Forschungsfragen zuwenden.

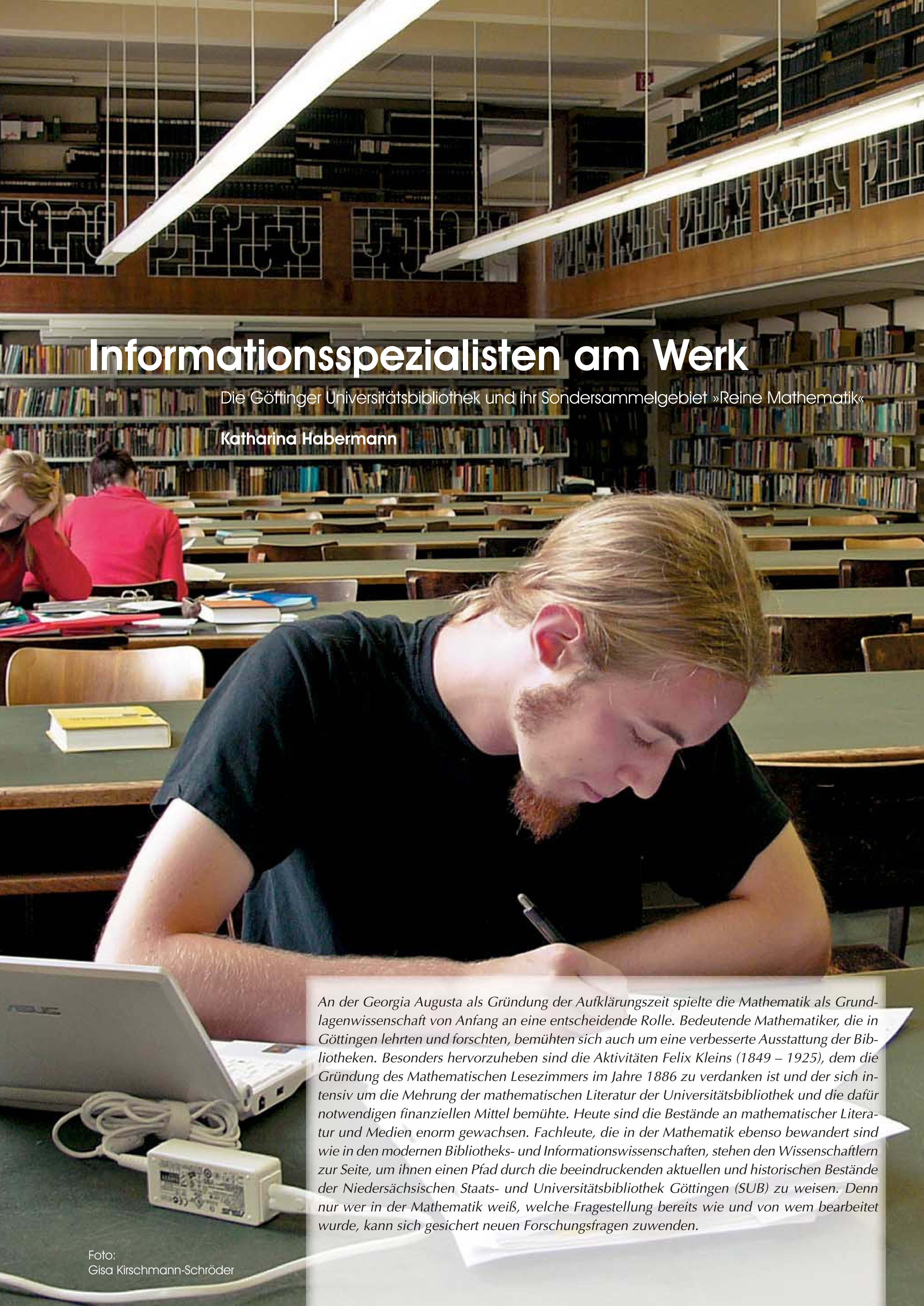


Foto:
Gisa Kirschmann-Schröder

Bereits seit ihrer Gründung im Jahre 1734 wurde an der Göttinger Universitätsbibliothek die mathematisch-naturwissenschaftliche Forschungsliteratur mit besonderer Intensität gesammelt und so frühzeitig der Grundstein ihrer heute wertvollen historischen mathematischen Bestände gelegt. Schon im 19. Jahrhundert bemerkte Carl Friedrich Gauß in einem Brief: »Ich habe die Bibliothek gesehen, und ich verspreche mir davon einen nicht geringen Beitrag zu meiner glücklichen Existenz in Göttingen«. Auch zu Beginn des 20. Jahrhunderts spielte die Bibliothek eine wichtige Rolle im engen Wechselspiel mit der Wissenschaft. Insbesondere am Beispiel der Mathematik wird deutlich, wie sich die Bedeutung, welche die Göttinger Mathematik weltweit erlangte, im Bestand der Bibliothek widerspiegelt.

Felix Kleins engagierte Bemühungen, Göttingen zu einem Zentrum der Mathematik zu machen, waren eng mit verschiedenen organisatorischen Aktivitäten verknüpft, die eine Ausgestaltung des mathematischen Bibliothekswesens sowohl in Göttingen als auch überregional zum Ziel hatten. So konnte er unter anderem beim zuständigen Ministerium eine Aufstockung der Gelder für die Göttinger Universitätsbibliothek im Bereich der Mathematik erreichen. Klein war es auch, der Anfang des 20. Jahrhunderts die Gründung einer mathematischen Zentralbibliothek für Deutschland in Göttingen anregte. Diese Bemühungen hatten jedoch wegen fehlender finanzieller Mittel keinen Erfolg. Im 20. Jahrhundert beteiligten sich überregionale Geldgeber an der finanziellen Förderung zum Ausbau des mathematischen Literaturbestandes in Göttingen: zum Beispiel Stiftungen amerikanischer und deutscher Industrieller oder die im Jahre 1920 gegründete »Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft« zur Minderung der finanziellen Auswirkungen des Ersten Weltkrieges auf den Wissenschaftsbetrieb.

Sondersammelgebiet »Reine Mathematik«

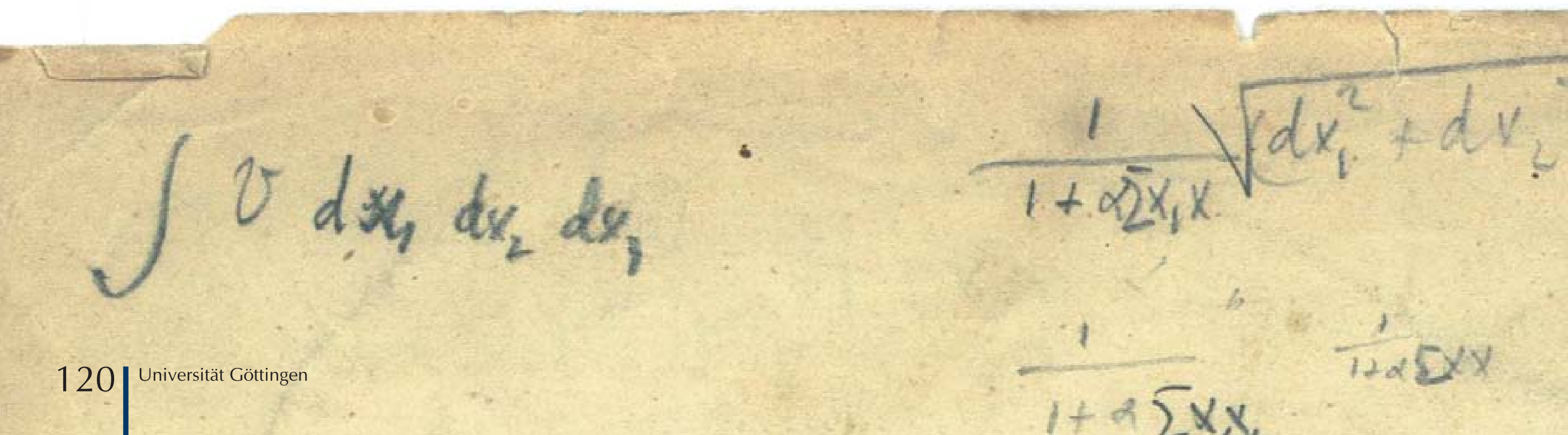
Nach dem zweiten Weltkrieg wurde die Göttinger Universitätsbibliothek im Jahre 1949 in das System der überregionalen Literaturversorgung der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) einbezogen. Hier betreut die SUB im Auftrag und mit beachtlicher Förderung der DFG unter anderem das Sondersammelgebiet »Reine Mathematik«. Die Wahl fiel auf Göttingen, einerseits weil der mathematische Bestand ohne Verluste über den Krieg gerettet werden konnte und andererseits, weil die Universitätsbibliothek neben der Literaturversorgung vor Ort schon immer die Verantwortung für eine nationale Versorgung mit wissenschaftlicher Fachliteratur wahrgenommen hatte. Auch spielte die überaus reiche wissenschaftliche mathematische Tradition eine Rolle, sodass das Sondersammelgebiet »Reine Mathematik« in Göttingen eine angemessene Heimat fand.

Das Sondersammelgebietsprogramm sorgt über einen verteilten Fachgebietsplan dafür, dass möglichst jede wissenschaftlich relevante Publikation, sei es ein Fachbuch oder ein Artikel in einer wissenschaftlichen Fachzeitschrift, in mindestens einem Exemplar in Deutschland vorhanden ist. Für dieses System spricht die Tatsache, dass die weltweite wissenschaftliche Literaturproduktion so gewaltig ist, dass keine Bibliothek mehr in der Lage ist, sämtliche für die Forschung relevante Literatur aller Fächer zu erwerben. Im Sondersammelgebietsprogramm der DFG haben daher 23 deutsche Bibliotheken, die für bestimmte Fächer bereits große Spezialbestände besitzen, einen umfassenden Sammelauftrag. Sie erwerben die weltweit publizierte wissenschaftlich relevante Literatur möglichst vollständig und stellen sie über Fernleih- und Kopierdienste der Wissenschaft zur Verfügung. Die SUB Göttingen betreut neben der »Reinen Mathematik« 16 weitere Sondersammelgebiete.

Als Sondersammelgebietsbibliothek für die »Reine Mathematik« ist Göttingen an zahlreichen Aktivitäten, Neuentwicklungen und Projekten der Informationsversorgung für die Mathematik beteiligt. Ziel ist dabei immer, die Informationsversorgung für alle Mathematiker in Deutschland zu verbessern. Aus diesen Projekten haben sich mittlerweile zahlreiche Serviceleistungen entwickelt, die deutschlandweit intensiv genutzt werden.

Mathematische Erkenntnisse von dauerhafter Gültigkeit

Die Mathematik, insbesondere die reine Mathematik, ist eine Wissenschaft, die weithin ohne



technische Hilfsmittel ausgeführt werden kann. Viele Mathematiker betonen, dass sie mit Bleistift und Papier beziehungsweise Kreide und Tafel bereits alles Notwendige zum Aufschreiben und Diskutieren ihrer Gedanken und Ideen haben und ihre Forschung betreiben können. Doch die Überprüfung, ob andere Berufskollegen die betreffende Fragestellung schon bearbeitet haben und welche Ergebnisse davon vorliegen, bildet eine weitere notwendige Voraussetzung. Daher sind Aufsätze, Zeitschriften, Bücher, Konferenzberichte und Referateorgane seit Langem ein wichtiges Handwerkszeug.

Hier kommt die Rolle der Bibliothek als Informationsfundus und Arbeitsmittel für die Mathematik ins Spiel. Ein weiteres spezifisches Merkmal der Mathematik ist die Tatsache, dass einmal gewonnene richtige Erkenntnisse für immer ihre Gültigkeit behalten, wogegen in vielen anderen Wissenschaften neue Erkenntnisse nach wenigen Jahren überholt sind. Deshalb ist es notwendig, immer bessere Möglichkeiten zur Bewältigung des außerordentlich vielfältigen und immer umfangreicheren Informationsangebotes in der Mathematik zu schaffen und alle Erkenntnisse der Mathematik aktuell zugänglich zu halten. Das wachsende mathematische Wissen ist dabei seit Langem nicht nur in den traditionellen Printmedien wie Büchern, Zeitschriften, Tagungs- und Forschungsberichten verzeichnet; vielmehr sind durch moderne Medienformen und insbesondere durch das Internet zahlreiche neue Informationsangebote entstanden. Dabei ist das heutige Spektrum von Fachinformationsressourcen seinem Wesen nach ein so genanntes »hybrides Angebot«, das heißt konventionelle, vor allem gedruckte, und rein elektronische Elemente stehen gleichberechtigt nebeneinander und sind auf vielfältige Weise miteinander verknüpft.

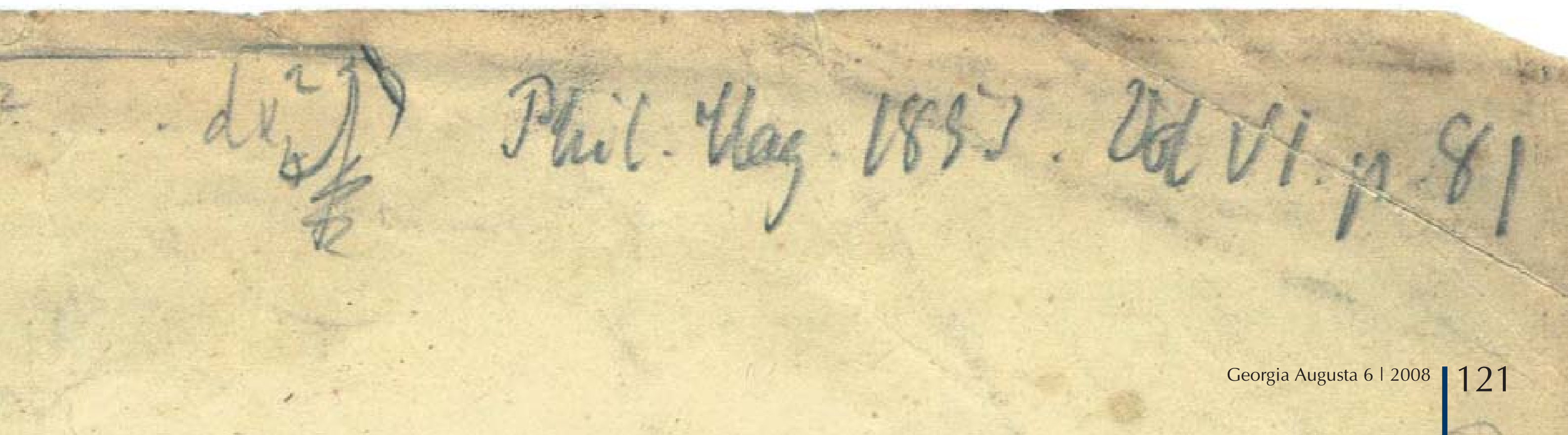

Rechnung auff der Linihen vnd Federn/ Auff allerley handthirung gamacht/ durch Adam Risen.

zum andern mal vbersehen vnd gemehret. Anno. M. D. XXXI.

Rechenbuch von Adam Ries, zweite Auflage »Rechnung auf den Linien und Federn« aus dem Jahr 1531. Handschriftensammlung der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Informationsspezialisten als Partner der Wissenschaft

Wie kommen Mathematiker an die für sie »richtigen« Informationen, also an die Informationen, die benötigt werden, um im Vorfeld ein Forschungsthema umreißen oder um im fortgeschrittenen Stadium zielgerichtet bearbeiten zu können? Hier sind die Mitarbeiter im Fachreferat einer



wissenschaftlichen Bibliothek als Informationsspezialisten gefordert. Klassisches Aktionsfeld im Rahmen eines vielschichtigen Aufgabenspektrums sind der Aufbau, die Pflege und Erschließung sowie die Vermittlung des Literaturbestandes, der traditionell sowohl Bücher als auch Zeitschriften umfasst und in zunehmendem Umfang eine Vielzahl neuer Medien einschließt. Dies sind beispielsweise wissenschaftliche Informationsquellen, die nicht textbasiert sind, wie Filme oder Bilder, verschiedenste elektronische Medien oder Online-Informationsangebote. Dieser Medienbestand bildet in seiner Gesamtheit die materielle Basis für sämtliche bibliothekarischen Dienste und Angebote. Die Fachreferenten sind insbesondere für die Auswahl und sachliche Erschließung des umfangreichen Bestandes zuständig. Dabei hat die Sacherschließung mit Blick auf die Digitale Bibliothek gewaltig an Bedeutung gewonnen, wollen doch Wissenschaftler in ihren Informationsplattformen vor allem auch nach fachlichen Kriterien recherchieren können. Zur sachlichen Erschließung kann man im Fachreferat insbesondere auf Instrumente zurückgreifen, die im Kontext der Bibliothekslandschaft mit einer langen Tradition aufgebaut worden sind und an deren Pflege und Weiterentwicklung auch heute gemeinschaftlich und kontinuierlich gearbeitet wird. All dies dient dazu, die Informationsangebote zu strukturieren und den Wissenschaftlern eine fachlich-inhaltliche Orientierung im Informationsdschungel komplexer Inhalte zu ermöglichen.

Mathematik in elektronischen Medien erfordert Informationskompetenz

Im Kontext der wissenschaftlichen Fachinformation haben darüber hinaus in den letzten Jahren Aufgaben immer stärker an Bedeutung gewonnen, die in den Bereich der wissenschaftlichen Information

Das Zentralarchiv für Mathematiker-Nachlässe an der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Die Göttinger Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855), Bernhard Riemann (1826 – 1866), Felix Klein (1849 – 1925) und David Hilbert (1862 – 1943) gehören zu den zahlreichen bedeutenden Gelehrten, deren Nachlässe an der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen (SUB) gesammelt, erschlossen und den Nutzern der Bibliothek zur Verfügung gestellt werden. Dabei besteht der Nachlass einer Person aus überliefertem Archivgut: Schriftstücke wie zum Beispiel Urkunden, Werke, Notizen, Korrespondenzen oder andere Lebensdokumente, Fotos usw. die sich auf die betreffende Person beziehen oder aus ihrem Besitz stammen. Da solche Unterlagen von Wissenschaftlern, Künstlern oder Schriftstellern sowohl das persönliche Leben als auch die berufliche Tätigkeit betreffen, stellen sie wertvolles Quellenmaterial für die Wissenschafts- und Kulturgeschichte dar. Sie bilden die Basis dessen, was auch in Zukunft über unsere Gegenwart Auskunft geben wird. Traditionell werden diese einzigartigen Materialien in Archiven, Bibliotheken, Forschungseinrichtungen und Museen aufbewahrt.

Für die Mathematik erkannte bereits Felix Klein die Bedeutung unveröffentlichter Schriftstücke namhafter Fachkollegen und begründete seinerzeit das so genannte Mathematiker-Archiv mit dem Ziel, Manuskripte und Briefe angesehener Berufsgefährten zu sammeln. Diese größte und bedeutendste Sammlung mathematischer Nachlässe in Deutschland bildete dann die Grundlage des Zentralarchivs für Mathematiker-Nachlässe, das 1992 auf Basis eines Kooperationsvertrages zwischen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und der Universität Göttingen an der Universitätbibliothek eingerichtet wurde.

Dieses Archiv fungiert für die Mathematik als die zentrale Stätte, an der Nachlässe von Mathematikerinnen und Mathematikern kompetent aufbewahrt, organisiert und verfügbar gemacht werden. Grundsätzlich bemüht sich das Zentralarchiv um die Bewahrung sämtlicher Mathematiker-Nachlässe und nimmt sie aus allen Orten an, wenn dem nicht sonstige Belange entgegenstehen und vor Ort kein Interesse an einer Übernahme besteht. Auch Nachlässe von international wirkenden Mathematikern, die keiner Universität oder Institution zugerechnet werden können, finden in Göttingen einen angemessenen Aufbewahrungsort. Das Zentralarchiv für Mathematiker-Nachlässe umfasst mittlerweile einen Bestand von gut 50 Nachlässen und einigen weiteren Sammlungen. Es trägt so in erheblichem Maße dazu bei, auch für die Zukunft wichtige mathematikhistorische Quellen zu sichern und der Wissenschaftsgeschichte verfügbar zu machen.

Seit Gründung des Zentralarchivs für Mathematiker-Nachlässe fördert die Akademie der Wissenschaften zu Göttingen die Katalogisierung. Unter dem Dach der Virtuellen Fachbibliothek Mathematik werden diese Informationen über die Manuskripte, Notizen, Fotos, Briefe, Urkunden, Gutachten etc., die im Archiv vorhanden sind, für die Mathematik fachspezifisch zusammengeführt und in alphabetischer Ordnung bereitgestellt.

http://www.vifa-math.de/zamn/

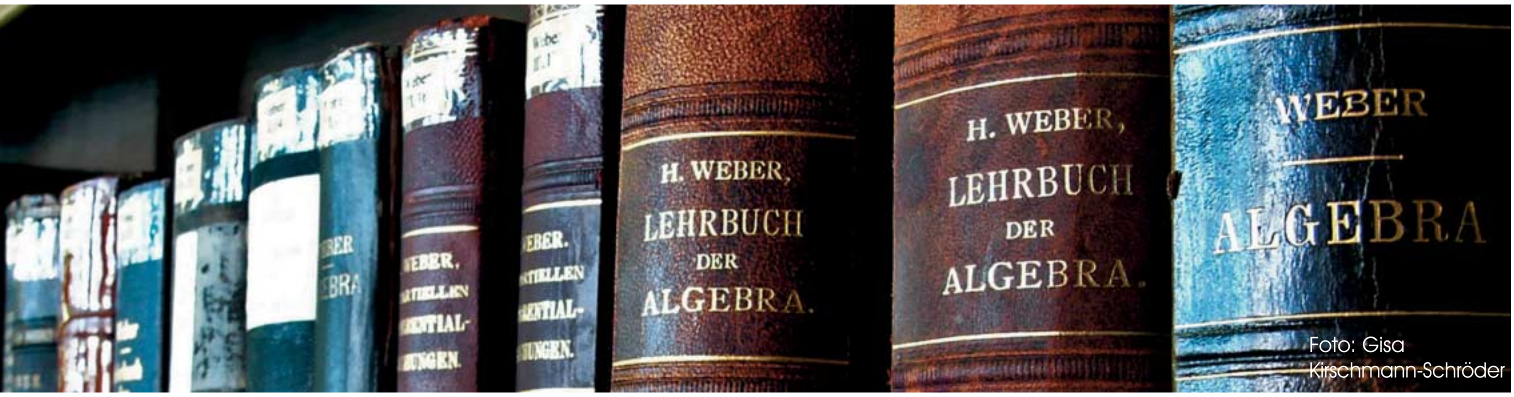


Foto: Gisa Kirschmann-Schröder

und Kommunikation fallen. Studierenden und Wissenschaftlern ist man als Fachreferentin nicht nur bei konkreten Einzelrecherchen behilflich, sondern vermittelt ihnen auch Informationskompetenz, die zur optimalen Nutzung des umfassenden Informationsangebotes notwendig ist. Speziell für Studierende mathematischer Studienfächer an der Göttinger Universität wurde unter dem Titel »Mathematics Information Services and Electronic Publishing« ein Modul zur Vermittlung fachspezifischer Informationskompetenz im Bereich Schlüsselqualifikationen in den Curricula der Bachelor- und Master-Studiengänge verankert. Bei all diesen Aktivitäten ist die Kenntnis der und die Einbindung in die jeweiligen Fächerkulturen eine gute Chance, fachspezifisch passgenaue Serviceangebote entwickeln und ausbauen zu können.

Im Rahmen der überregionalen Projektaktivitäten für die Mathematik hat sich eine große Vielfalt und Anwendungsbreite entwickelt. Ein nennenswertes und erfolgreich etabliertes Projekt ist der elektronische Fachinformationsführer MATHGUIDE, der seit seinem Aufbau ständig weiterentwickelt, kontinuierlich durch neue Inhalte ergänzt und gegenwärtig als Modul in die Virtuelle Fachbibliothek Mathematik integriert wird. Ein weiteres erfolgreich realisiertes Projekt ist das ERAM-Jahrbuch-Projekt, eines der weltweit ersten Digitalisierungsprojekte. In diesem Projekt wurde 1997 am Göttinger Digitalisierungszentrum mit dem Aufbau eines Archivs forschungsrelevanter mathematischer Texte begonnen, dem »Electronic Research Archive for Mathematics«. Derzeit enthält das Archiv eine über eine Million Seiten umfassende Sammlung so genannter Retrodigitalisate, das heißt eine Auswahl eingescannter vor allem historischer Texte. Die mathematischen Monographien und Zeitschriften stehen über das Internet weltweit kostenfrei zur Verfügung. Hier findet man nicht nur die gesammelten Werke von Carl Friedrich Gauß und David Hilbert, sondern beispielsweise auch die Habilitationsschrift von Bernhard Riemann oder die Doktorarbeit von Emmy Noether. Im Rahmen dieses Projektes wurde außerdem das mathematische Rezensionsorgan »Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik« zeitgerecht aufgearbeitet und in einer Datenbank erfasst.

Retrospektiv digitalisieren: Göttingen führend bei historischer mathematischer Literatur

In dem Spektrum zahlreicher Aktivitäten, welche Bibliotheken seit Mitte der 1990er Jahre im Bereich der elektronischen Informationsversorgung entfalten, stellt diese retrospektive Digitalisierung von Bibliotheksbeständen einen wesentlichen Teilbereich dar. Ein Spezifikum der Mathematik ist die unbegrenzte Gültigkeit mathematischer Forschungsresultate sowie die ausgeprägte Abhängigkeit mathematischer Forschung von zuvor erzielten Resultaten. Das macht eine retrospektive Digitalisierung von Altbeständen besonders nützlich. Dabei spielen für die aktuelle Forschung auch weit in die Vergangenheit zurückreichende mathematische Veröffentlichungen eine bedeutende Rolle. Daher hat die SUB Göttingen großes Interesse daran, ihren mathematischen Altbestand zu digitalisieren, vor allem zum Thema reine Mathematik. Mit ihren Digitalisierungsaktivitäten in der Mathematik ist die SUB Göttingen eingebunden in die »Digital Mathematics Library« (DML). Damit kann sie gegenwärtig die umfangreichsten Sammlungen digitalisierter mathematischer Texte überhaupt anbieten. Die DML ist ein ambitioniertes internationales Vorhaben, in das sich alle lokalen Initiativen und Projekte einordnen. Es ist der weltweite Versuch, sämtliche gedruckte Fachliteratur in der Mathematik vollständig retrospektiv zu digitalisieren und gemeinsam mit bereits elektronisch hergestellten Publikationen über einen einheitlichen Zugang im Internet bereitzustellen.

In diesem Rahmen wurde von der SUB Göttingen in dem deutsch-russischen Kooperationsprojekt »Russian Digital Mathematics Library« (RusDML) auch ein digitales Kernarchiv russischsprachiger Zeitschriftenartikel geschaffen,

Kurzübersicht über die genannten Projekte

MATHGUIDE
http://www.mathguide.de/
DFG-Projekt, Förderzeitraum 1996 – 1999
Aufbau eines elektronischen Fachinformationssystems und Katalogisierung internetbasierter Informationsressourcen für das Sondersammelgebiet »Reine Mathematik« sowie deren Aufbereitung für die Ansprüche wissenschaftlicher Recherche.

ERAM-Jahrbuch-Projekt
http://www.emis.de/MATH/JFM/
DFG-Projekt, Förderzeitraum 1997 – 2005
Retrospektive Digitalisierung forschungsrelevanter mathematischer Texte aus den Altbeständen der SUB Göttingen (»Electronic Research Archive for Mathematics«/ERAM) und Aufbau einer Datenbank, basierend auf dem Referateorgan »Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (1868 – 1943)«

RusDML
http://dms.rusdml.de/
DFG-Projekt, Förderzeitraum 2004 – 2007
Deutsch-russisches Kooperationsprojekt (»Russian Digital Mathematics Library«/RusDML) zur retrospektiven Digitalisierung und zum Aufbau eines digitalen Kernarchivs russischsprachiger Zeitschriftenartikel in der Mathematik.

Massendigitalisierung Mathematik
http://gdz.sub.uni-goettingen.de/
DFG-Projekt, Förderzeitraum 2008 – 2009
Retrospektive Digitalisierung des gesamten historischen Bestandes der SUB Göttingen an mathematischen Texten bis einschließlich 1900.

EMANI
http://www.emani.org/
gegründet 2002
»Electronic Mathematics Archives Network Initiative« – kooperative Initiative zur Langzeitarchivierung und Langzeitverfügbarkeit mathematischer Inhalte in digitaler Form.

Virtuelle Fachbibliothek Mathematik
http://www.vifa-math.de/
DFG-Projekt, Förderzeitraum 2005 – 2009
Zentrales Einstiegsportal für die Recherche nach mathematisch relevanter Fachinformation.

das bedeutende mathematische Forschungsliteratur, die zuvor ausschließlich gedruckt beziehungsweise an nur wenigen Bibliotheken außerhalb Russlands einsehbar war, frei verfügbar macht. Schließlich verfolgt die Bibliothek zurzeit das Vorhaben, ihren gesamten historischen mathematischen Bestand bis einschließlich 1900 retrospektiv zu digitalisieren. Die Göttinger Bibliothek arbeitet dabei eng mit anderen Institutionen und Projekten zusammen, die auf dem Gebiet der retrospektiven Digitalisierung für die Mathematik aktiv sind. Insbesondere unter dem Dach der »Electronic Mathematics Archives Network Initiative« (EMANI), welche im Jahre 2002 als kooperative Initiative internationaler wissenschaftlicher Bibliotheken, dem Springer-Verlag Heidelberg und der »Europäischen Mathematischen Gesellschaft« (EMS) gegründet wurde. Erklärtes Ziel dieser Initiative ist es, die wissenschaftliche Literatur in der Mathematik langfristig zu archivieren. Im Rahmen dieser Initiative hat Göttingen im Oktober 2007 den Vorsitz übernommen.

Die Aktivitäten der Göttinger Bibliothek auf dem Gebiet der Informationsversorgung für die Mathematik mündete schließlich in den laufenden Aufbau der »Virtuellen Fachbibliothek Mathematik«. Seit 2005 koordiniert die SUB Göttingen mit Unterstützung der DFG den Aufbau dieser digitalen Bibliothek. Als zentrales Einstiegsportal für die Recherche nach mathematisch relevanter Fachinformation soll sie es ermöglichen, unter einer Suchoberfläche sowohl nach konventionellen Medienformen (zum Beispiel gedruckten Büchern) als auch nach elektronischen Ressourcen (zum Beispiel Internetseiten) zu recherchieren. Mit dieser Bündelung bislang verstreuter Fachinformationen werden vormals zeitaufwändige Einzelrecherchen zu einer einzigen Suchanfrage zusammengefasst und so wesentlich erleichtert.

Die Konzeption und der Internetauftritt wurden mit Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft in Göttingen entwickelt und realisiert. Der weitere Ausbau erfolgt in enger Kooperation mit weiteren wichtigen Anbietern mathematischer Fachinformation: der Technischen Informationsbibliothek Hannover, welche das Sondersammelgebiet »Angewandte Mathematik« betreut, und dem Fachinformationszentrum Karlsruhe/Abteilung Mathematik Berlin, welches gemeinsam mit der Heidelberger Akademie der Wissenschaften und der »European Mathematical Society« das Referateorgan »Zentralblatt MATH« herausgibt.

Ausblick und Perspektiven

Angesichts einer immer weiter wachsenden Fülle von Informationsquellen und -systemen bei weiterem technologischen Fortschritt in den Recherche-Hilfsmitteln wird neben der dauerhaften Verantwortung für einen kontinuierlichen Bestandsaufbau die aktive Vermittlung von Informationskompetenz für Studierende und Wissenschaftler weiter an Bedeutung gewinnen. Dies bezieht sich auf alle Facetten gegenwärtiger und zukünftiger Informationsressourcen und Medientypen. Darüber hinaus birgt das Fachreferat generell mit den hier tätigen Fachinformationsspezialisten das Potenzial für eine qualitativ neuartige Integration in die Forschung – auch und insbesondere unter den Vorzeichen der Exzellenzinitiative. Dabei stellen Informationsspezialisten professionelles Know-how bereit und werden zukünftig in die Forscherteams deutlich enger eingebunden sein.

The Göttingen State and University Library has been an innovative information centre for the University of Göttingen since its founding in 1734. In a cooperative system of nationwide supply of literature the library is in charge of several special subject collections, especially of »pure mathematics«. As a subject specialist in an academic library one has a wide range of responsibilities, from collection building and subject cataloguing to project management, and as an information professional one provides accurate and up-to-date information services. Since the rapidly increasing importance of the Internet for scientific information and communication and the technical development of new media systems have changed the general conditions of scientific publishing in a significant way, there is significant opportunity to contribute to future scholarly communications.

Privatdozentin Dr. Katharina Habermann, Jahrgang 1966, begann ihre wissenschaftliche Laufbahn an der Humboldt-Universität zu Berlin. Sie besuchte an dieser Einrichtung eine Spezialschule für Mathematik und Physik, studierte von 1984 bis 1989 Mathematik mit Nebenfach Physik und promovierte 1993. Nach der Promotion ging sie an die Ruhr-Universität Bochum, wo sie sich im Jahre 1999 habilitierte. Weitere berufliche Stationen waren das Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften in Leipzig und die Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald. Im Jahr 2000 erhielt sie den Gerhard-Hess-Preis, einen Forschungsförderpreis der Deutschen Forschungsgemeinschaft, mit dem sie ein eigenes Forschungsprojekt auf dem Gebiet der symplektischen Geometrie realisieren konnte. Seit 2004 arbeitet sie als Fachreferentin an der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen. Hier betreut sie die Fächer Mathematik und Informatik sowie das Sondersammelgebiet »Reine Mathematik«. An der Mathematischen Fakultät der Universität Göttingen hält sie Vorlesungen und bietet Kurse zur Vermittlung Mathematik-spezifischer Informationskompetenz an. Katharina Habermann ist als mathematische Fachinformationsspezialistin zudem im Sprechergremium der Fachgruppe »Information und Kommunikation« der Deutschen Mathematiker-Vereinigung aktiv. (http://mathe2008.wordpress.com/)

Foto: SUB

Abb 1: Gottvater beim Schöpfungswerk, Bible moralisée,
erste Hälfte 13. Jahrhundert, Wien, Österreichische Nationalbibliothek, Cod. 2554, Bl. IV

Mit einem Zirkel in der rechten, dem Weltenrund in der linken Hand findet man Gottvater auf der ›Titelseite‹ der französischen ›Bible moralisée‹ Cod. 2554 der Österreichischen Nationalbibliothek in Wien aus der ersten Hälfte des 13. Jahrhunderts, einer der berühmtesten Illuminationen des Mittelalters (Abb. 1). »Ici crie dex ciel et terre, soleil et lune et toz elemenz«, so erläutert die Beischrift am oberen Bildrand und macht damit unmissverständlich klar, dass das göttliche Schöpfungswerk, die Erschaffung von Himmel und Erde, von Sonne und Mond und allen Elementen, veranschaulicht ist. Aber noch unstrukturiert erscheinen großenteils die Einzeldinge innerhalb des abgezirkelten Universums, während der Schöpfer-Architekt und -Geometer doch augenscheinlich dabei ist, ihnen Form und Gestalt zu verleihen.

Hinter einer Darstellung wie dieser steht die feste Überzeugung, dass Gott, wie es im ›Buch der Weisheit‹ heißt, »alles nach Maß, Zahl und Gewicht geordnet« habe. Und nicht ohne Grund konnte ein solcher ordentlicher Aufbau des gesamten Kosmos angenommen werden, denn der Ausgangspunkt und das Fundament der christlich-religiösen Weltsicht, die Heilige Schrift, bezeugt vom ›ersten Buch Mose‹ bis zur ›Offenbarung des Johannes‹ durchgehend eine Vorliebe für sinnbildlich-zeichenhaft verstandene Zahlenordnungen. Notwendig muss die christliche Kunst, die von den biblischen Schriften und deren Exegese ihren Ausgang nimmt, ihrerseits von entsprechenden Zahlenordnungen durchdrungen sein. Ehe wir zwei Beispiele dafür genauer betrachten, sind die biblischen Voraussetzungen in Erinnerung zu rufen.

Nach Maß, Zahl und Gewicht

Zahlen und ihre Bedeutung in der christlichen Kunst

Thomas Noll

Zahlensymbolik in der Bibel

Schon die Eins als Zahl des Einen und der Einheit in der Vielheit hat ihren theologischen Stellenwert. Als der Eine wird Gott verschiedentlich charakterisiert, und als Einheit die Beziehung zwischen Gott und Christus. Als Einheit gedacht ist die Kirche, die Gemeinschaft der Gläubigen, und der Zusammenhang zwischen Christus und der Kirche als seinem ›Leib‹. Die Drei hat ihre Bedeutung durch die Trinität und das Trishagion. »Drei sind es, die Zeugnis ablegen« für Christus: »der Geist, das Wasser und das Blut; und diese drei sind eins.« Weiter hat Christus drei Versuchungen zu bestehen, und drei Tage – analog zu Jonas Frist im Bauch des Fisches – liegen zwischen seinem Tod und seiner Auferstehung. Den vornehmlich auf Gott bezogenen Zahlen Eins und Drei steht die Vier als Vollzahl der geschaffenen Welt gegenüber. Vier Paradiesflüsse und vier Winde werden genannt und »vier Enden der Erde«; entsprechend gibt es vier Evangelisten. Vier Tiere sieht Daniel in einer Vision, die vier (Welt-)Reiche bezeichnen, und vier Wesen – noch überdies jeweils ein Tetramorph von Gestalt – umgeben den Thron Gottes.

Als heilige Zahl oder Zahl Gottes, die – als Summe aus vier und drei – eine höhere Totalität als die Vier versinnbildlicht, erscheint dann die Sieben. Sie taucht auf im ›ersten Buch Mose‹ bei der Schöpfungswoche mit dem von Gott geheiligten siebten Tag – an dem er »ruhte [...], nachdem er das ganze Werk der Schöpfung vollendet hatte« – bis hin zur ›Offenbarung des Johannes‹ mit den sieben Gemeinden und sieben Leuchtern, dem Buch mit sieben Siegeln und dem Lamm mit sieben Augen und sieben Hörnern sowie zahlreichen weiteren Septenaren. In den verschiedensten Zusammenhängen begegnet die Sieben als eine der zentralen biblischen Ordnungsziffern. Von der Schöpfungswoche leitet sich die Heiligung des Sabbat als des siebten Tags der Woche her, und ebenso das Sabbatjahr; das Jubeljahr soll ausgerufen werden nach siebenmal sieben Jahren, und auch beim Wochenfest und beim Laubhüttenfest spielt die Zahl Sieben eine Rolle. Nicht anders prägt sie die Kult- und Opfervorschriften, zu schweigen von den (zweimal) sieben Jahren, die Jakob um Rahel dient, den durch entsprechende Kühe und Ähren im Traum angezeigten sieben mageren und sieben fetten Jahren oder den von der Siebenzahl gekennzeichneten Umständen bei der Eroberung von Jericho. Mit »sieben Säulen« hat die Weisheit ihr Haus gebaut und »geläutert siebenfach« sind für den Psalmisten die Worte des Herrn, »siebenmal am Tag« singt er das Lob des Herrn. »Siebenfacher Rache« verfällt der, der Kain erschlägt, »siebenundsiebzigfach« wird Lamech gerächt. Aber »nicht siebenmal, sondern siebenundsiebzigmal«, so erklärt Christus seinem Jünger, soll Petrus dem Bruder, der sich gegen ihn versündigt hat, vergeben. Schließlich gliedert Matthäus den Stammbaum Jesu in dreimal vierzehn (= 3 x 2 x 7) Generationen. Als Vollzahl dient die Sieben allerdings auch im Negativen, denn »sechs Dinge sind dem Herrn verhasst, / sieben sind ihm ein Greuel«; sieben Dämonen werden aus Maria Magdalena ausgetrieben, und in der ›Offenbarung des Johannes‹ haben der feuerrote Drache – der »Teufel oder Satan« – , das Tier aus dem Meer und das scharlachrote Tier, auf dem die Hure Babylon sitzt, samt und sonders sieben Köpfe.

Die Acht, als Zahl der Erneuerung oder des Neubeginns, findet sich bei Noach und seiner Familie, »acht Menschen, durch das Wasser gerettet«, die nach der Sintflut neuerdings den Ursprung der Völkerschaften bilden (drei Söhne sind dabei die Stammväter aller Völker); sie begegnet bei der Erwählung Davids, des achten Sohnes Isais, zum König von Israel oder bei der Beschneidung der männlichen Nachkommen in Israel am achten Tag. Acht Seligpreisungen enthält die Bergpredigt.

Die Zehn bildet die Summe der ägyptischen Plagen, aber auch der Gebote vom Sinai; sie erscheint bei der Abgabe des Zehnten, »der vom Ertrag des Landes oder von den Baumfrüchten abzuziehen ist« und »dem Herrn« gehört, wie auch als Multiplikator mit der Sieben, um auf Siebzig als eine weitere Vollzahl zu kommen. Denn »siebzig von den Ältesten Israels« vertreten beim Bundesschluss am Sinai das Volk, siebzig Jahre währt die Babylonische Gefangenschaft, und siebzig Jahrwochen werden dem Propheten Daniel in einer Vision als heilsgeschichtliche Zeitspanne genannt.

Aus der Reihe weiterer gleichermaßen sinnbildlich befrachteter Zahlen mag der Hinweis zuletzt noch auf die Zwölf genügen. Es ist dies die Zahl der Söhne Jakobs und damit der Stämme Israels ebenso wie die der Apostel, die Zahl der Sterne in der Krone des Apokalyptischen Weibes und der Tore und Grundsteine des himmlischen Jerusalem. Multipliziert beziffert sie die jeweils vierundzwanzig Dienstklassen der Priester und Sänger des Alten Bundes und die vierundzwanzig Ältesten vor dem Thron Gottes, aber auch die »hundertvierundvierzigtausend aus allen Stämmen der Söhne Israels«, die durch »das Siegel des lebendigen Gottes« gekennzeichnet sind.

Die Ordnung von Raum und Zeit

Schon diese kursorische Übersicht zeigt hinlänglich die eminente Bedeutung von Zahlenordnungen und Zahlensymbolik in der biblischen Überlieferung. Es kann nicht verwundern, wenn in der Folge, in der Geschichte der Ekklesia, diese Ordnungssysteme eine weitere Ausdehnung buchstäblich in Raum und Zeit erfuhren.

Die Zeit, über den natürlichen Jahresrhythmus der zwölf Monate und vier Jahreszeiten hinaus, war insgesamt, als Welt-Zeit, gegliedert zum einen durch die Heilsetappen im Anschluss an Paulus, nämlich in die Zeit von Adam bis Mose, vor dem Bundesschluss und der Gesetzgebung am Sinai (ante legem), in die Zeit von Mose bis Christus ›unter dem Gesetz‹ (sub lege) und in die Zeit vom Kommen Christi bis zu dessen zweitem ›adventus‹ am Jüngsten Tag ›unter der Gnade‹ (sub gratia).

Aber auch auf vier Heilsepochen konnte diese Ordnung ausgeweitet werden. In dem Sicard von Cremona (1150/51 – 1215) zugeschriebenen ›Mitrale‹, einer umfangreichen Messerklärung, wird unterschieden eine Zeit der Abirrung (tempus deviationis) von Adam bis Mose, eine Zeit der Rückführung (tempus revocationis) von Mose bis Christus, eine Zeit der Versöhnung (tempus reconciliationis) von der Geburt Christi bis zu seiner Himmelfahrt und schließlich eine Zeit der Pilgerschaft (tempus peregrinationis) von der Himmelfahrt Christi bis zum Weltende.

Parallel zu dieser heilsgeschichtlichen Zeitordnung war – in Anknüpfung namentlich an den Stammbaum Jesu bei Matthäus – von Augustinus (356 – 430) bis zum Ende des Mittelalters die Gliederung der Weltgeschichte in sieben Weltzeitalter üblich. Die erste ›aetas‹ reichte dabei von Adam bis Noach, die zweite von Noach bis Abraham, die dritte von Abraham bis David, die vierte von David bis zur Babylonischen Gefangenschaft, die fünfte von da bis zur Geburt Christi, die sechste von Christus bis zum Weltende. Das siebte Weltzeitalter bezeichnete die Ruhe der Verstorbenen. Es wird, so erklärt Augustinus in seiner Schrift ›Vom Gottesstaat‹, »unser Sabbat sein, dessen Ende kein Abend ist, sondern der Tag des Herrn, gleichsam der achte ewige, der durch Christi Auferstehung seine Weihe empfangen hat und die ewige Ruhe vorbildet, nicht nur des Geistes, sondern auch des Leibes!« Zugleich wurden, ebenfalls bereits von Augustinus, diese Weltzeitalter mit den menschlichen Lebensaltern in Beziehung gesetzt, sodass die sieben Weltepochen mit den Lebensstufen des Kleinkindes (infantia), der Kindheit (pueritia), der Jünglingszeit (adolescentia), des Jugendalters (iuventus), der Reife (gravitas) und des Greisenalters (senectus) korrelieren. Das siebte Weltzeitalter spiegelt sich in der Totenruhe (requies). Im Menschenleben fand auf diese Weise die gesamte Welt-Zeit ihren Widerhall, geordnet durch die symbolische Vollzahl Sieben. Aber auch das Kirchenjahr versinnbildlicht die Welt- und Heilsgeschichte, wenn beispielsweise Rupert von Deutz (1075/76 – 1129) die Sonntage Septuagesima bis Laetare mit den sieben›aetates‹ parallelisiert.

Nicht anders als die Zeit war auch der Raum »nach Maß, Zahl und Gewicht« geordnet. Die Weltchronik des Hartmann Schedel von 1493, am Ausgang des Mittelalters, die in einer deutschen und einer lateinischen Ausgabe erschien und in der die sieben Weltzeitalter – als Gliederungsschema – kaum anders als reichlich ein Jahrtausend zuvor bei Augustinus noch in Geltung stehen, illustriert in einem Holzschnitt mit dem siebten Schöpfungstag zugleich den mittelalterlichen Kosmos (Abb. 2). Entsprechend dem ptolemäischen, geozentrischen Weltsystem findet sich die Erde (terra) im Zentrum und bildet mit den drei folgenden Sphären des Wassers, der Luft und des Feuers (spera aque, aeris, ignis) die »elementische natur«. Daran schließt sich an die »himlisch natur«, die ihrerseits in »drey fuernemlich himel« unterteilt ist: in den Fixsternhimmel (firmamentum), den Kristallhimmel (celum cristallinum) und das Empyreum (empyreum). Der Fixsternhimmel (mit den Tierkreiszeichen) umschließt seinerseits die »siben vmbkreys der siben planeten« (spera saturni, iouis, martis, solis, ueneris, mercurij, lune; unbekannt waren noch Uranus, Neptun und Pluto, dafür figurieren Sonne und Mond als Planeten). Die obere Sphäre des Kristallhimmels aber ist das »primum mobile«. Alle himmlischen Sphären unterhalb davon befinden sich in Bewegung, unbeweglich ruht dagegen der dritte, jenseits davon sich erstreckende »feuerige himel«, das Empyreum oder der »himel der trifeltigkeit«. Der Holzschnitt zeigt jenseits des »primum mobile« Gottvater, thronend im Kreis der (seit der Spätantike definierten) neun Engelschöre, die gesondert namentlich aufgeführt sind; mit dem obersten Chor beginnend die Seraphin, Cherubin, Throni, Dominationes, Principatus, Potestates, Virtutes, Archangeli und Angeli (Seraphim, Cherubim, Throne, Herrschaften, Fürstentümer, Mächte, Kräfte, Erzengel und Engel). Nochmals in drei Bereiche kann das Empyreum differenziert werden, nämlich in die Orte der Trinität, der Engel und der Heiligen, und in drei Hierarchien gliedern sich überdies die neun Engelschöre – die als obersten ursprünglich noch einen zehnten Chor umfassten, Luzifer mit seinem Gefolge, der allerdings bereits vor der Erschaffung der Welt durch seinen Hochmut zu Fall gekommen war. Vier Winde (Subsolanus, Auster, Aparcias und Zephyrus) an den vier Ecken der Erde – die auf einer anderen Ebene liegen und der »elementischen natur« zugehören – umrahmen zuletzt das Bild des Universums, das kaum strenger und klarer durch die Zahlen Drei, Vier und Sieben geordnet sein könnte.

Raum und Zeit, so zeigt sich, waren im Mittelalter, auf der Basis und in Verlängerung der biblischen Zahlensymbolik, in denkbar geordnete Verhältnisse gebracht. Aber Reflexe der augen-

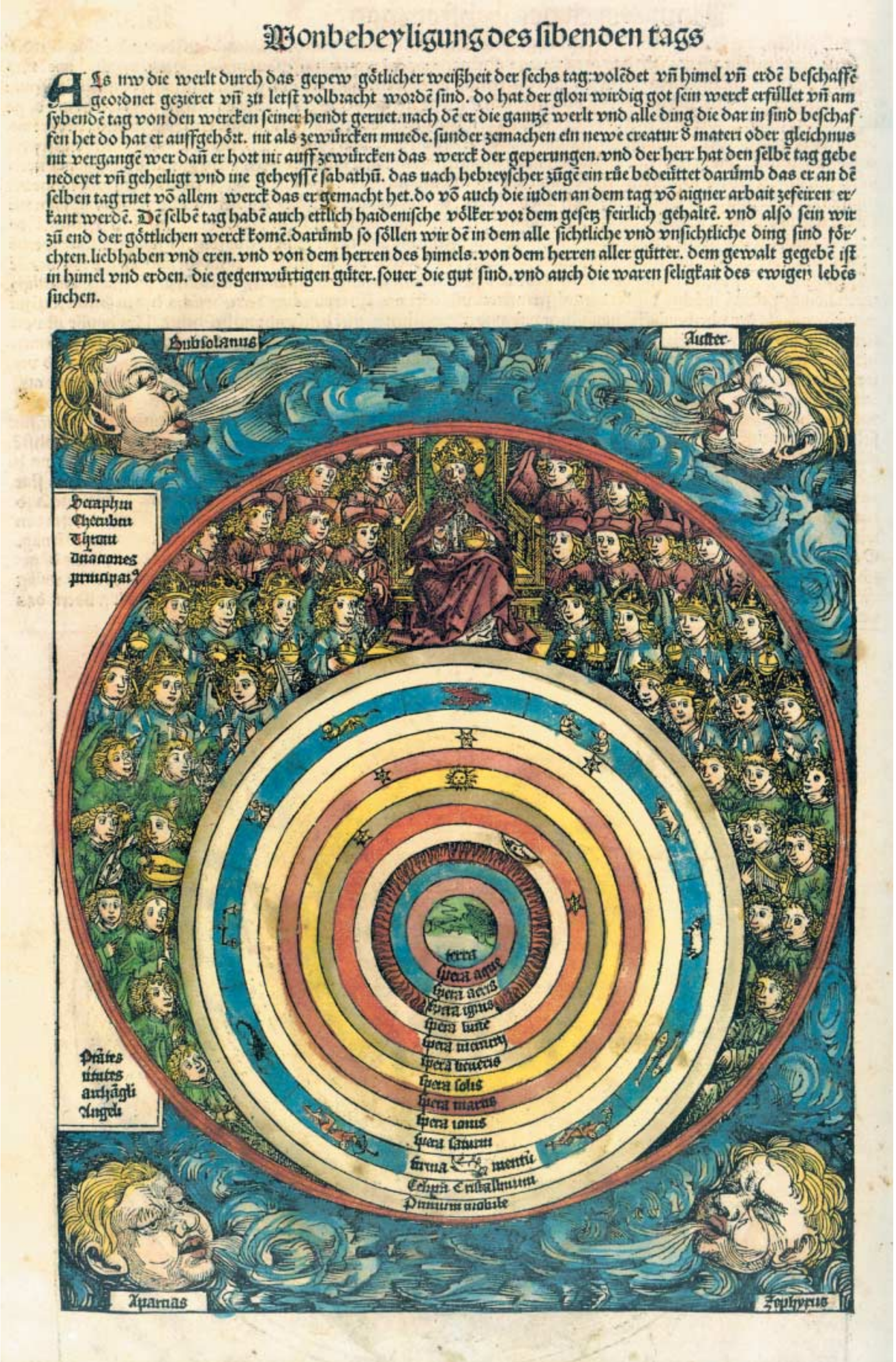


Abb. 2: Michael Wolgemut, Wilhelm Pleydenwurff und Werkstatt, Der siebte Schöpfungstag, Holzschnitt. Hartmann Schedel, Weltchronik, Nürnberg 1493, Bl. Vv

scheinlich von Gott selbst angelegten Zahlenordnung finden sich im sechsten Weltzeitalter in den verschiedensten Bereichen des kirchlichen Lebens. Es genügt, exemplarisch an den Stellenwert der Sieben als heiliger Vollzahl zu erinnern, um den allenthalben durchdringenden Wunsch nach numerischer Systematik als Abglanz und Ausdruck einer höheren Ordnung und Harmonie zu begreifen. Von den – jeweils durchaus nicht von Anfang an feststehenden oder vorgegebenen – sieben Weihestufen, den sieben Sakramenten, den sieben Werken der Barmherzigkeit, den sieben Haupttugenden und Hauptlastern (oder Todsünden) spannt sich der Bogen bis hin zu spekulativen Analogiebildungen in der theologischen Literatur, so von nicht weniger als acht Septenaren im ›Speculum virginum‹, dem ›Jungfrauenspiegel‹, einem um 1140 entstandenen Lehrdialog.

Das Deckenbild von St. Michaelis in Hildesheim

Auch in der christlichen bildenden Kunst mussten unter diesen Umständen numerische Ordnungen ihren Niederschlag finden. Dies beginnt bei der unmittelbaren Wiedergabe einer biblischen oder kirchlichen Quantität, etwa von einem der eben genannten Septenare, soweit das Bezifferte darstellbar war; dabei konnte noch eine metaphorische Rede durch buchstäbliche Umsetzung des Sprachbilds veranschaulicht werden, sodass beispielsweise die »sieben Säulen« der Weisheit durchaus als architektonisches Motiv auftauchen. Und es erstreckt sich diese Aufnahme von Zahlenordnungen bis in die Struktur und Komposition von größeren Bildprogrammen. Zwei Beispiele sollen dies veranschaulichen.

Die in der ersten Hälfte des 13. Jahrhunderts dekorierte Eichenholzdecke von St. Michaelis in Hildesheim illustriert den Stammbaum Christi mit der ›Wurzel Jesse‹ (Abb. 3). Fußend auf der Prophezeiung des Jesaja – »egredietur virga de radice Iesse et flos de radice eius ascendet« (»ein Zweig wird hervorgehen aus der Wurzel Jesse und eine Blüte aus seiner Wurzel erwachsen«) – und nach der Auslegung dieser Worte auf die Jungfrau Maria (virga = virgo Maria) und Christus (flos = Christus), zeigt die Deckenmalerei im zweituntersten Feld Isai oder Jesse, den Vater Davids, auf seinem Lager und einen mächtigen Stamm mit üppigen Ranken, der aus seiner Seite hervorgeht; in den nächsten vier Bildfeldern trägt dieses Gewächs als königliche Vorfahren Christi nach dem Stammbaum bei Matthäus zunächst David, dann dessen Sohn Salomo. Die oberen beiden Könige sind nicht sicher zu benennen; als die vor allem gottesfürchtigen Herrscher in Juda nach Salomo dürfte es sich jedoch um Hiskija und Joschija handeln. Zuoberst erscheinen Maria und Christus, segnend und mit dem Buch des Lebens (die Darstellung Christi und die oben, rechts und links anschließenden Bildfelder sind im Original verloren und rekonstruiert). Während David von vier nicht näher gekennzeichneten Personen umringt ist, sind bei den folgenden drei Königen jeweils vier weitere gekrönte Häupter in den Ranken untergebracht; Maria dagegen wird gerahmt von den vier Kardinaltugenden (Stärke, Gerechtigkeit, Maß und Klugheit). In der anschließenden Figurenreihe

Abb. 3: Die Wurzel Jesse und der Sündenfall, erste Hälfte 13. Jahrhundert, Holzdecke des Mittelschiffs, St. Michaelis, Hildesheim steht rechts oben neben Maria der Prophet Jesaja mit den auf die Muttergottes bezogenen Worten: »Ecce virgo c[oncipiet et pariet filium]« (»Siehe, eine Jungfrau wird empfangen und einen Sohn gebären«); unter Jesaja erscheint der Erzengel Gabriel mit dem Gruß »Ave Maria [gratia plena dominus tecum]« und verweist damit auf die Verkündigung von Christi Geburt und die Erfüllung von Jesajas Prophetie. Aaron mit seinem blühenden Stab auf der anderen Seite erscheint als Sinnbild der jungfräulichen Mutterschaft Marias, Johannes der Täufer mit seinem Spruchband – »parate viam domini« (»Bereitet den Weg des Herrn«) – ist in diesem Sinne als direkter Vorläufer und Wegbereiter Christi dargestellt. In den Gestalten mit Spruchbändern beiderseits von Isai und den vier Königen sind weitere Propheten zu erkennen; links unten neben Isai ist wohl ein zweites Mal Jesaja abgebildet, nun mit den auf die ›Wurzel Jesse‹ bezogenen Worten »Egredietur [virga de radice Iesse...]«. Ihm gegenüber steht Bileam mit der ganz entsprechend gemeinten Verheißung »Orietur s[tella ex Iacob et consurget virga ex Israhel]« (»Ein Stern wird aus Jakob aufgehen und ein Zweig aus Israel sich emporrichten«). In den von Ranken umschlungenen zweiundvierzig Medaillons der äußeren Bildleiste kommen, angefangen mit Set (dem dritten Sohn Adams und Evas) im mittleren der drei unteren Medaillons bis zu Eli (dem Vater Josefs) im mittleren der drei oberen Rundbilder, ein Großteil der von Lukas aufgelisteten fünfundsiebzig leiblichen (das heißt väterlichen) Vorfahren Christi vor Augen. Während in der zentralen mittleren Bildreihe die königliche Abstammung Christi aus dem Stamm Juda dokumentiert ist, stellen die Medaillons mit zweiundvierzig leiblichen Vorfahren des Erlösers eine Verknüpfung her zwischen dem Bild des ›salvator mundi‹ zuoberst und dem untersten Bild der mittleren Reihe. Hier ist mit Adam und Eva der Sündenfall zu sehen, der den Anfang der Weltgeschichte markiert und das Heilsgeschehen zur ›Regeneration‹ des Menschen veranlasst hat. Adam, durch den »die Sünde in die Welt« gekommen ist, und Christus, der ›neue Adam‹, durch den »die Gnade Gottes« dem Menschen zuteil wird, sind polar beziehungsweise typologisch einander gegenübergestellt, aber auch durch die umlaufende Generationenfolge miteinander verknüpft. Die Einheit und Folgerichtigkeit der Heilsgeschichte wird damit evident.

Weiter findet man an den Seiten bzw. unteren Ecken der Sündenfalldarstellung die vier Paradiesflüsse (Pischon, Gihon, Tigris und Eufrat) als männliche Personifikationen mit Wasserkrügen. Entsprechend umgeben Christus die vier Erzengel Rafael, Uriel (der nur im außerbiblischen Schrifttum genannt wird), Gabriel und Michael. Zwischen den Erzengeln oben und den Paradiesflüssen unten sind die vier Evangelisten eingefügt, Matthäus und Johannes, Markus und Lukas, jeweils am Schreibpult und gekennzeichnet durch ihr Symbol: Mensch, Adler, Löwe und Stier. Und nochmals tauchen diese vier Wesen (animalia) als Symbole der Evangelisten – mit Spruchbändern, die deren Namen tragen – in den äußersten Ecken der Decke auf. »Da die Welt, in der wir leben, sich in vier Gegenden teilt«, erklärt Irenäus von Lyon (2. Jahrhundert), »und weil es vier Hauptwindrichtungen gibt, die Kirche aber auf der ganzen Erde verbreitet ist, Säule und Stütze der Kirche das Evangelium und der Geist des Lebens sind, so hat sie folgerichtig vier Säulen [...]. Da leuchtet es ein, dass der Erbauer des Alls, der Logos, [...] uns bei seinem Erscheinen vor den Menschen das Evangelium in vierfacher Gestalt gab, aber zusammengehalten durch einen Geist«. In diesem Sinne erhalten die Evangelistensymbole ihren Platz an den vier Ecken als an den vier Ecken der Welt. Die Decke von St. Michaelis umfasst inhaltlich und versinnbildlicht in ihrer Struktur als Totalität den Welt-Raum und die Welt-Zeit, vom Fall Adams bis zum Kommen Christi, aber in der Bildform des thronenden ›salvator mundi‹ zugleich auch den zweiten ›adventus‹ Christi zum Gericht am Ende des sechsten Weltzeitalters. Die Vier als Vollzahl der geschaffenen Welt findet sich bei den Evangelisten, den Erzengeln, den Kardinaltugenden und den Paradiesflüssen, auch bei den Königen in den großen Bildfeldern zwischen Isai und Maria; aus den fünfundsiebzig Vorfahren Christi bei Lukas werden in der äußeren Bildreihe mit zweiundvierzig Personen dreimal vierzehn (oder 3 x 2 x 7) Generationen ausgewählt, deren Zahl Matthäus in seinem (von Lukas abweichenden, anders aufgefassten) Stammbaum Christi nennt. Hinzu kommt, dass die Decke, die das Mittelschiff einer dreischiffigen Basilika überspannt, in ihren Proportionen drei ideellen Grundrissquadraten entspricht, die ein doppelter (›sächsischer‹) Stützenwechsel markiert. Formal und inhaltlich erscheint das Deckenbild mithin nach Maß und Zahl geordnet, ein Abbild und Sinnbild der Heilsgeschichte zugleich.

Das Königsportal der Kathedrale von Chartres

In anderer Weise, doch mit gleicher Strenge, ist reichlich ein Dreivierteljahrhundert zuvor das Westportal, die ›porta regia‹ (um 1150), der Kathedrale Notre-Dame in Chartres gestaltet (Abb. 4). Genauer drei Stufenportale, zwei Tore beiderseits des höheren und breiteren mittleren Eingangs, sind vollständig ausgestattet mit Skulpturenschmuck in der Laibung – dem Gewände –, in der Kapitellzone, im Türsturz

und Bogenfeld – dem Tympanon – sowie in den Bogenläufen – den Archivolten. Auch hier schließen alle Teile sich zu einem Gesamtprogramm zusammen, das die ganze Heilsgeschichte, und damit die Welt-Zeit, umfasst. Zunächst am Gewände, vor den in die Stufen der abgetreppten Laibung eingestellten Säulen, stehen noch neunzehn von ursprünglich vierundzwanzig alttestamentlichen Gestalten, Männern und Frauen, die, ohne namentlich benannt werden zu können, als – überwiegend königliche – Vorfahren Christi anzusehen sind. Zu Häupten dieser zugleich hochstilisierten und lebensvollen, gleichsam ›aristokratischen‹ Gewändefiguren werden in der Kapitellzone in knapp vierzig Einzelszenen die (apokryphe) Kindheitsgeschichte Marias sowie die Kindheit und Passion Christi erzählerisch entfaltet. Als herausgehobene Szenen der Kindheitsgeschichte Jesu zeigt das rechte Seitenportal im Türsturz die Verkündigung, den Besuch Marias bei Elisabet – die Heimsuchung –, die Geburt Christi (unteres Register) und die Darbringung Jesu im Tempel (oberes Register). Im Tympanon thront Maria mit dem Christuskind als ›Sitz der Weisheit (Gottes)‹ (sedes sapientiae), flankiert von zwei räuchernden Engeln.

Dem Eintritt Christi in die Welt steht am linken Seitenportal seine Himmelfahrt gegenüber. Über den (nur zehn) Aposteln, im unteren Register des Türsturzes, sieht man im Bogenfeld, wie Christus, von zwei Engeln flankiert, »emporgehoben« und von einer Wolke aufgenommen wird. Vier Engel wenden sich den emporschauenden Aposteln zu mit den Worten: »Dieser Jesus, der von euch ging und in den Himmel aufgenommen wurde, wird ebenso wiederkommen, wie ihr ihn habt zum Himmel hingehen sehen«. In diesem Verständnis, als Erfüllung dieser Worte, erscheint im Tympanon des Mittelportals Christus in seiner Herrlichkeit (maiestas domini), was zugleich seine Wiederkehr, die Parusie oder den zweiten ›adventus‹, meint. Umgeben von den vier Evangelistensymbolen (mit Büchern) bzw. den vier Wesen um den Thron Gottes und inmitten von zwölf Engeln (in der innersten Archivolte) und den vierundzwanzig Ältesten (in den beiden äußeren Archivolten) – zwischen denen im Scheitel der äußeren Archivolte nochmals zwei Engel zu seinen Häupten eine Krone halten – thront Christus in der Mandorla (einer mandelförmigen Aureole). Zugleich erscheint er über den zwölf Aposteln und zwei weiteren Personen rechts und links, in denen die beiden Propheten der Endzeit (hier Elija und Henoch) zu vermuten sind. Sie und die Apostel – als Beisitzer beim Jüngsten

Abb. 4: Das Königsportal (Westportal), um 1150, Kathedrale Notre-Dame, Chartres

Gericht – machen die eschatologische Bedeutung der Darstellung unmissverständlich klar: Es hat »der Menschensohn sich auf den Thron der Herrlichkeit« gesetzt am Ende der Zeiten, zum Gericht und damit »die Welt neu geschaffen« werde.

In den großen Rahmen des sechsten Weltzeitalters zwischen dem ersten und zweiten ›adventus‹ Christi, in die Heilsepoche ›sub gratia‹, fügen sich die Bildwerke in den Archivolten der beiden Seitenportale ein. Links sind in den zwei Bogenläufen knappe szenische Darstellungen der zwölf Monatsarbeiten und der zwölf Tierkreiszeichen zu erkennen. Zu sehen ist etwa auf der linken Seite, innen zuunterst, der April als eine bekränzte Gestalt, die in die Äste eines blühenden Baums greift, darüber erscheint das Sternbild des Widders; daneben verbildlicht den Juli ein Schnitter, der auf den Knien mit der Sichel das Korn schneidet, über ihm findet sich der Krebs. Der immer wiederkehrende Rhythmus des Jahres tritt mit diesen Bildwerken vor Augen.

Demgegenüber sind in den Archivolten des rechten Seitenportals (abgesehen von zwei Tierkreiszeichen am inneren Bogenlauf links unten) die sieben ›artes liberales‹, die sieben Freien Künste – mit dem Trivium (Dreiweg) von Grammatik, Rhetorik und Dialektik und dem Quadrivium von Arithmetik, Musik, Geometrie und Astronomie – jeweils zusammen mit einem Hauptvertreter aus der Antike wiedergegeben. Auf der rechten Seite findet man zuunterst Priscianus oder Donatus, darüber die Grammatik in Gestalt einer Frau mit Buch und Rute, zwei Schüler zu ihren Füßen; daneben sitzt Pythagoras unterhalb der Musik, einer Frau mit verschiedenen Instrumenten, die eben mit einem Hämmerchen ein Glockenspiel ertönen lässt. Der höhere Bildungsweg mit seinem zweigeteilten Fächerkanon – der nicht zuletzt an der Kathedralschule von Chartres gelehrt wurde –, die Ausbildung der höheren geistigen Fähigkeiten des Menschen ist hier dargestellt und bezeichnet ein Komplement zu den Monatsarbeiten am linken Portal. Hinzu kommen noch sechs Engel am inneren Bogenlauf, die die thronende Maria samt den Räucherengeln umgeben.

Über den Vertretern des Alten Bundes am Gewände und über der Kapitellzone, die das neutestamentliche Heilsgeschehen detailliert vergegenwärtigt, werden in gleichsam dialektischer Form drei Heilsereignisse pointiert: der Eintritt Christi in die Welt, seine Rückkehr zum Vater und seine Wiederkehr in Herrlichkeit am Ende der Zeiten. In diesen umfassenden Heilsrahmen eingespannt, davon umschlossen, sind der Jahresrhythmus und die Arbeiten des Menschen in einer ›prästabilierten‹, unveränderlichen Ordnung, ebenso wie seine höheren geistigen Bestrebungen, die vor allem der Gotteserkenntnis und dem Lob des Schöpfers dienen sollen. Die Zwölf, mit den ursprünglich vierundzwanzig Gewändefiguren und den vierundzwanzig Ältesten (jeweils 2 x 12), den Aposteln und Engeln (am inneren Bogenlauf des Mittelportals) sowie den Monatsarbeiten und Tierkreiszeichen; die Sieben, mit den Freien Künsten und ihren Vertretern; auch die Vier, mit den Evangelistensymbolen und den Engeln zu Häupten der Apostel bei der Himmelfahrt Christi; und schließlich die Drei, mit der Portalanlage insgesamt, die in das Mittelschiff der Kathedrale als Abbild des himmlischen Jerusalem führt – dies sind die Zahlen, die Form und Inhalt des Königsportals und seines die Welt-Zeit umspannenden Bildprogramms in eine klare Ordnung bringen.

Die beiden hier beispielhaft vorgestellten Werke aus Deutschland und Frankreich stammen nicht zufällig aus dem 12. und 13. Jahrhundert, aus der Zeit der Scholastik, in der die großen theologischen ›Summen‹ entstehen und eine Systematisierung des überlieferten Wissens erfolgt. Doch Zahlenordnungen in der christlichen bildenden Kunst sind, wie kaum betont werden muss, keineswegs auf diese Epoche beschränkt. Andere Beispiele wären ebenso aus dem frühen Mittelalter oder der Barockzeit anzuführen. Die Bedeutung der sinnbildlich-numerischen Ordnung bleibt notwendig in Geltung, solange biblische und kirchliche Themen zur Darstellung gebracht werden und die Überzeugung fortbesteht, dass ein Herr und Schöpfer des Universums alles »nach Maß, Zahl und Gewicht geordnet« habe.

Prof. Dr. Thomas Noll, Jahrgang 1962, studierte Kunstgeschichte, Klassische Archäologie sowie Mittlere und Neuere Geschichte in Göttingen und Heidelberg. Die Promotion erfolgte in Göttingen 1991 mit einer Arbeit über die politische Grafik von A. Paul Weber im Dritten Reich. Als Stipendiat des Landes Niedersachsen ging er anschließend für zwei Jahre an das Zentralinstitut für Kunstgeschichte in München. Danach übernahm er eine Stelle als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Kunstgeschichte der Universität Augsburg. Ein Postdoktorandenstipendium am Graduiertenkolleg ›Kirche und Gesellschaft im Heiligen Römischen Reich des 15. und 16. Jahrhunderts‹ führte ihn zurück nach Göttingen. Hier habilitierte er sich 2001 mit einer Studie über Albrecht Altdorfer und Themen der religiösen und profanen Kunst um 1500. Eine Vertretungsprofessur und Lehraufträge folgten in Kassel. In Göttingen lehrt er seit 2007 als apl. Professor am Kunstgeschichtlichen Seminar.

Numerical orders in Christian art have their origin and preconditions in the rich number symbolism of the Bible. Numbers laden with symbolic imagery pervade the Holy Scriptures from the Book of Genesis through to the Book of Revelation. The One as the number of unity, the Three that takes its significance from the Trinity or the Trisagion, the Thrice Holy, the Four as the ›full count‹ of the world as it is created – from the four rivers of paradise to the four corners of the earth, the Seven as the holy number of the week of creation with God's Sabbath on the seventh day at the beginning of the Bible, and the hosts of septenaries in the Apocalypse at its end, and further the Eight, the Ten, the Twelve: these numbers and more all carry their own symbolic significance.

Being rooted in these biblical figure-based orders and their allegorical interpretation, space and time in the Middle Ages were brought into a clear numerical structure. Time was organised into three or four epochs of salvation and into seven world ages, the universe encompassed a four-part natural world of elements and three main heavens, the lowest of which, the sky of fixed stars, in turn enclosing seven planets; the uppermost heavens were divided into three parts, and inhabiting the empyreum were, besides the Trinity and the Saints, also three hierarchies of angels from a total of nine hosts of angels. The numerical values as characterised in the Bible also gave rise to those from which the church took its order, as expressed, for example, in the seven steps to consecration and seven sacraments, as well as the seven cardinal virtues and the seven cardinal sins.

This numerical symbolism inevitably found expression to an equal extent in Christian art; two extensive arrangements of depictions from the 12th and 13th centuries from Germany and France can demonstrate this in exemplary manner. The painted ceiling of St. Michael's Church in Hildesheim shows the ›Root of Jesse‹ revealing three times fourteen ancestors of Christ and the four rivers of paradise encompassing the fall of mankind, with the four archangels and the four cardinal virtues surrounding Christ and Mary, and twice with the four Evangelists. Equally clearly structured in terms of biblical numbers is the three-part Royal Portal of Chartres Cathedral, which originally presented twenty-four ancestors of Christ and the twelve Apostles, with the twelve labours of the months and twelve signs of the zodiac, the seven *artes liberales*, and the four *animalia* surrounding the throne of Christ. In each case, the numerical arrangement serves to make apparent in systematic form a comprehensive *Weltbild* in the salvation-historical context.

Literatur:

Bible moralisée. Codex Vindobonensis 2554 der Österreichischen Nationalbibliothek. Kommentar von Reiner Haussherr. Übersetzung der französischen Bibeltexte von Hans-Walter Stork (Glanzlichter der Buchkunst), Darmstadt 1998. Unveränderter Nachdruck der Ausg. Graz 1992.

Lexikon zur Bibel, hg. v. Fritz Rienecker, Wuppertal 1960.

Heinz Meyer u. Rudolf Suntrup, Lexikon der mittelalterlichen Zahlenbedeutungen (Münstersche Mittelalter-Studien 56), München 1987.

Hartmann Schedel, Weltchronik. Kolorierte Gesamtausgabe von 1493. Einleitung und Kommentar von Stephan Füssel, Köln u.a. 2001.

Roderich Schmidt, Aetates mundi. Die Weltalter als Gliederungsprinzip der Geschichte, in: Zeitschrift für Kirchengeschichte, Vierte Folge, 5, 67 (1955-56), S. 288-317.

Rolf-Jürgen Grote u. Vera Kellner, Die Bilderdecke der Hildesheimer Michaeliskirche. Erforschung eines Weltkulturerbes. Aktuelle Befunde der Denkmalpflege im Rahmen der interdisziplinären Bestandssicherung und Erhaltungsplanung der Deckenmalerei (Arbeitshefte zur Denkmalpflege in Niedersachsen 28), München, Berlin 2002.

Christine Wulf, Die Inschriften der Stadt Hildesheim, 2 Bde. (Die Deutschen Inschriften 58), Wiesbaden 2003, Nr. 65 (Deckenbild von St. Michaelis).

Willibald Sauerländer, Das Königsportal in Chartres. Heilsgeschichte und Lebenswirklichkeit, Frankfurt a.M. 1984.

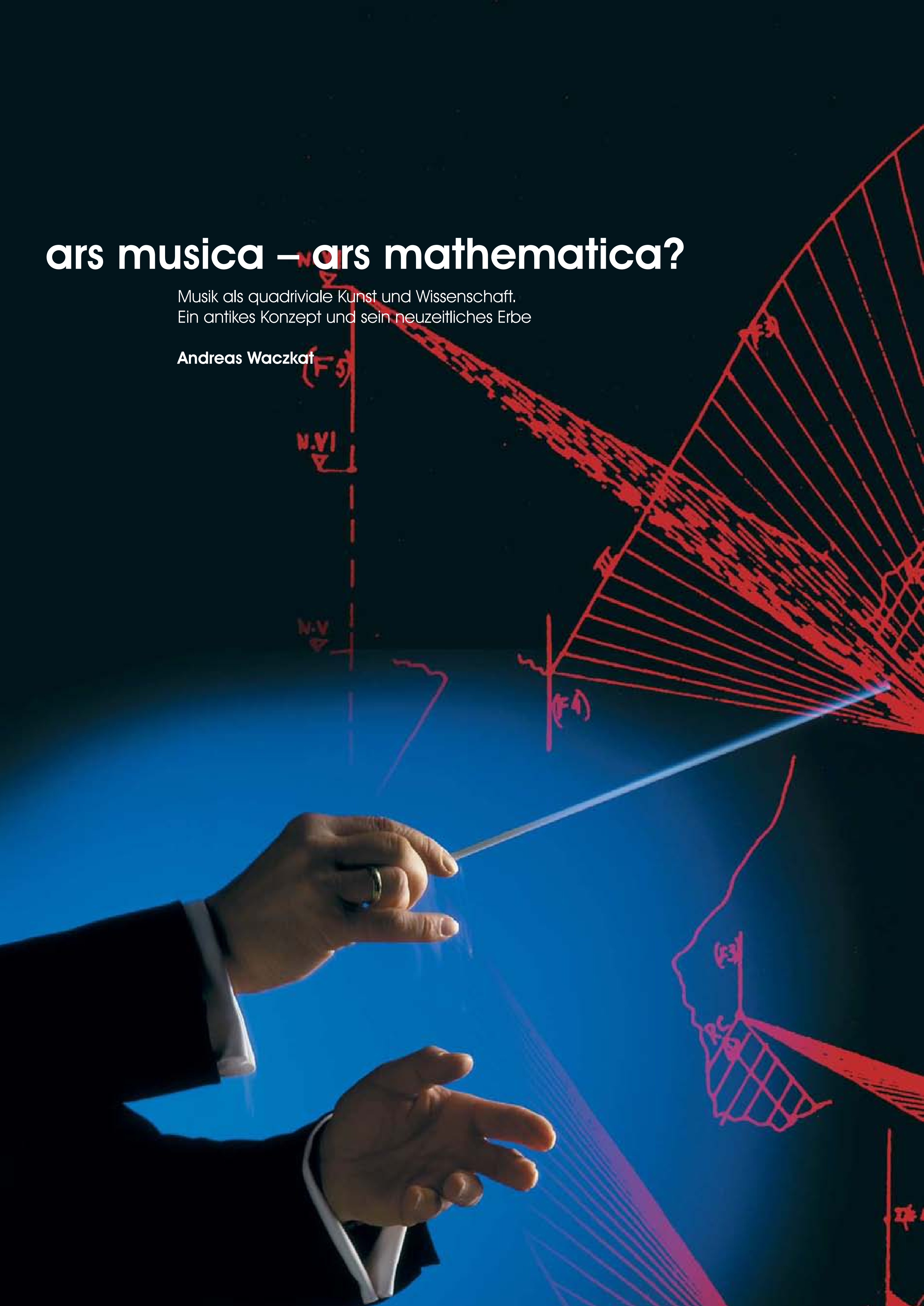
Bearbeitung der Abbildungen: Stephan Eckardt

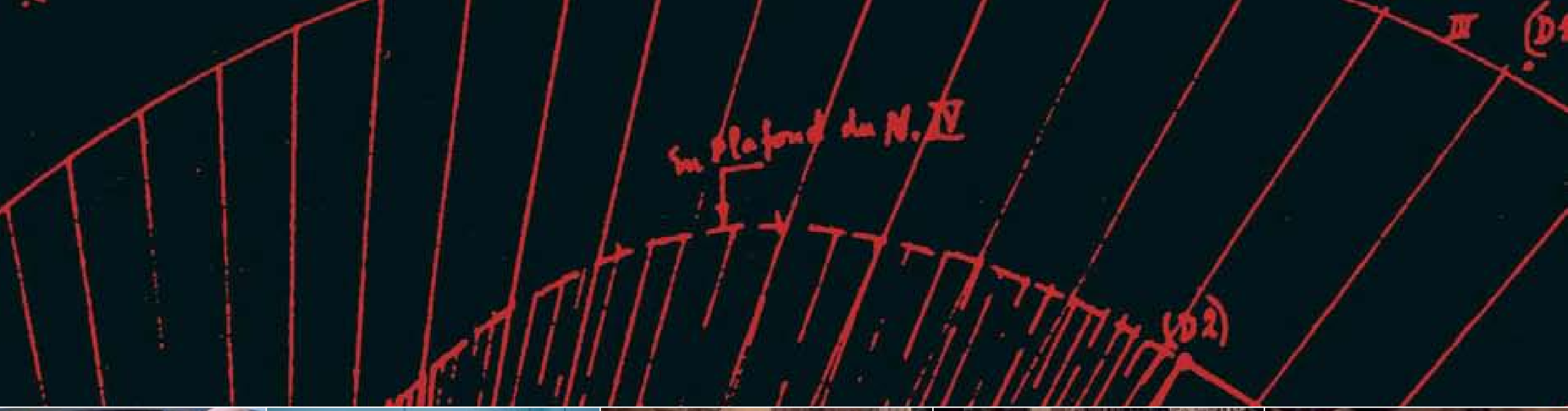

www.spk-goettingen.de
e-mail: info@spk-goettingen.de
100 % Sicherheit
für Ihre -Geldanlage:
Sprechen Sie uns an!
Sparkasse
Sichere Einlagen und
verlässliche Geschäftsbeziehungen.
Sparkasse
Göttingen
SEIT 1801
Die Sparkassen in Deutschland werden durch einen Haftungsverbund gesichert. Dieser wird durch die Gemeinschaft der Sparkassen-Finanzgruppe getragen. Die Mitglieder stehen füreinander ein und sichern den Bestand der Institute. Die Einlagen der Kunden sind ohne betragsmäßige Begrenzung geschützt. Wenn's um Geld geht- Sparkasse Göttingen.

ars musica – ars mathematica?

Musik als quadriviale Kunst und Wissenschaft. Ein antikes Konzept und sein neuzeitliches Erbe

Andreas Waczkat





In einer Folge der Science-Fiction-Serie »Star Trek: Raumschiff Voyager« trifft die Besatzung des im Delta-Quadranten gestrandeten Raumschiffs auf das Volk der Qomar. Die Qomari, höchst begabte Mathematiker allesamt, verfügen zwar über hoch entwickelte, der menschlichen weit überlegene Technologie, doch Musik ist ihnen fremd. Umso erstaunter sind sie, als der holografische Doktor der Voyager plötzlich zu singen anfängt – ein einfaches Volkslied zunächst, später einige Arien aus Giuseppe Verdis Oper Don Carlos. Schnell sind sich die Qomari einig: Besonders faszinierend an Musik sind die mathematischen Strukturen ihres Aufbaus. Auftritte des Doktors in der Heimatwelt der Qomari werden frenetisch bejubelt, die an den Doktor gerichtete Fanpost legt das Kommunikationssystem der Voyager lahm – bis das fremde Volk nach kurzer Zeit ein eigenes Hologramm entwickelt hat, das in der Lage ist, weitaus komplexere mathematische Modelle zum Klingen zu bringen. Das Ergebnis begeistert die Qomari, klingt aus Sicht eines gegenwärtigen irdischen Musikwissenschaftlers aber eher enttäuschend – nachzuhören in der Serienfolge »Der Virtuose« oder unter http://www.memory-alpha.org/en/wiki/Virtuoso_(episode).

Hintergrundbild:
Iannis Xenakis
Polytope für Licht- und Klanginszenierungen, Entwurfsskizze

Diese Episode, so skurril sie im Einzelnen auch sein mag, weist im Grenzbereich von Musik und Mathematik durchaus über sich hinaus. Hörbare Musik ist in gewisser Weise hörbare Mathematik: Luftschwingungen lassen sich berechnen, die Überlagerung von Tönen mit mathematischen Modellen beschreiben. Die zeitliche Ordnung der Aufeinanderfolge von Tönen in einer Komposition folgt Mustern, die zwar künstlerischer Inspiration entstammen, sich aber dennoch als Muster mit mathematischen Methoden beschreiben und analysieren lassen. Dieses Wissen ist nicht neu. Gerade in den historischen Anfängen verschmelzen Mathematik und Musiktheorie weitgehend. Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik bildeten das Quadrivium innerhalb der Sieben Freien Künste, der *septem artes liberales*, der zentralen Instanz im spätantiken und mittelalterlichen Wissenssystem. Musik galt als eine Zahlwissenschaft, die über einen unschätzbaren Vorteil verfügt: Sie macht sinnlich erfahrbar, was sonst nur abstrakt gedacht werden kann. Sinnliche Erfahrung der Musik hat Beweiskraft.

Dieses Gedankengebäude ist uns von den Pythagoreern überliefert, einer Gemeinschaft um den Universalgelehrten Pythagoras von Samos, der als Wundermann und Verkünder einer neuen religiösen Lehre angesehen wurde. Pythagoras galt als Begründer der Mathematik und der exakten Wissenschaften – und im Mittelalter vor allem als *musicus*. Inzwischen scheint plausibel, dass die pythagoreische Lehre in ihren Grundzügen auf altiranische Weisheit zurückgeht, der Antike jedoch galt Pythagoras als Begründer des Wissens um die Harmonie der Welt. Pythagoras und die Pythagoreer bezogen zunächst zwei Dinge aufeinander: Planeten und Konsonanzen. Durch die Bewegung der Gestirne entsteht demnach eine Harmonie, indem der Schall der einzelnen Gestirne konsoniert. Sonne und Saturn, ebenso Sonne und Mond verhalten sich zueinander wie die Zahlen 2:1; musikalisch entspricht dieses Verhältnis der Oktave, einer perfekten Konsonanz. Sonne und Jupiter hingegen bewegen sich ebenso wie Sonne und Merkur zueinander im Verhältnis 3:2, dem Verhältnis der ebenfalls perfekt konsonierenden Quinte. Sonne und Mars sowie Sonne und Venus nehmen jeweils das Verhältnis 4:3 zueinander ein und bilden damit eine Quarte.

Diese Verhältnisse abstrakt zu erkennen, ist nicht nur aufgrund der astronomischen Dimensionen eine erhebliche Herausforderung. Sie mit geeigneten Werkzeugen sinnlich erfahrbar zu machen, musste daher willkommen sein. Gebräuchliches Demonstrationsinstrument war das Monochord: eine über einem Resonanzkörper gespannte einzelne Saite, die mit einem beweglichen Steg in beliebigen Proportionen geteilt werden konnte. Denkbar war auch die Verwendung von Instrumenten mit mehreren Saiten, um unterschiedliche Teilungen simultan hören und beurteilen zu können. Auf einem solchen Monochord bildete nun die Erde als Ausgangspunkt das eine Saitenende, Saturn als der am weitesten entfernte Planet das andere. Die Sonne steht exakt im Mittelpunkt, womit sich die Saitenteilung 2:1 ergibt: die Oktave, eine hörbar perfekte Harmonie. Den ältesten Überlieferungen zufolge soll Pythagoras dieses

Boëthius, Pythagoras, Platon und Nicomachus als Autoritäten, auf die sich die Musiklehre stützt.
Miniatur, Handschrift aus Canterbury, um 1150
Cambridge, University Library

Geheimnis in einer Schmiede entdeckt haben, wo er in den Schlägen des Schmiedes ebenfalls solche harmonischen Verhältnisse hörte. Er verglich die Verhältnisse der Hämmer zueinander, bestimmte danach mathematisch das Verhältnis der Töne zueinander und übertrug die Proportionen auf das Monochord. Er führte somit, wie wir sagen würden, den empirischen Nachweis, dass das Hören von Konsonanz und Dissonanz, von gut und schlecht zusammen Klingendem, ein mathematisches Vergleichen ist.

Dass diese Schmiedenlegende der physikalischen Stichhaltigkeit entbehrt, ist nebensächlich, denn sie dient lediglich dazu, den Ursprung und die Herkunft des pythagoreischen Wissens aufzuzeigen. In religionswissenschaftlichen Begriffen gesprochen, waren die Pythagoreer Anhänger einer nichtmissionierenden mystischen Offenbarungsreligion, die strenge Arkandisziplin übten: Das Weltwissen der Pythagoreer war eine Geheimlehre, über die wir nur aus späteren, häufig polemischen Zeugnissen unterrichtet sind. Dennoch hat Pythagoras damit wesentliche Grundsteine der abendländischen Musiktheorie gelegt. Die Einschätzung bestimmter Schwingungsverhältnisse als konsonant, anderer als dissonant ist die Basis der abendländischen Tonalität; bis in die Frühe Neuzeit hinein beschränkten sich Kompositionslehren – sofern man sie rein handwerklich versteht – darauf, den geordneten Umgang mit Dissonanzen in einem Tonsatz zu erklären. Die mathematische Ordnung der Welt analog in Musik zu erklären, konnte auch von christlichen Denkern problemlos assimiliert werden, wenn die schöne Ordnung als von Gott gegeben angenommen wurde. Musik ist hörbarer Ausdruck des göttlichen Plans.

Auch die Pythagoreer erkannten die Ordnung der ersten vier Zahlen, der *tetraktys*, als heilig an, da sich in ihr die Proportionen aller konsonanten Intervalle wiederfinden, wobei außerdem die Summe der Zahlen 1 bis 4 die ebenfalls heilige Zahl 10 ergibt – letztere bleibt musiktheoretisch übrigens ohne erkennbare Bedeutung.

Beim Nachrechnen tut sich freilich ein Problem auf. Die perfekten Proportionen widersprechen einander nämlich, wenn man sie auf ein konkretes in Oktaven gestuftes Tonsystem anwendet. Zwei übereinander geschichtete Quinten ergeben das Verhältnis

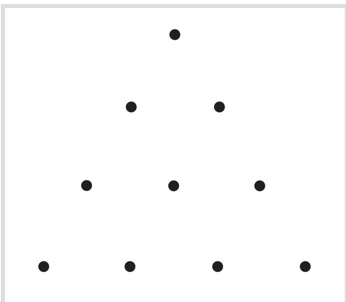
$(3:2)^2 = 9:4$.

Zieht man davon die Oktave ab, bleiben

$(9:4) : (2:1) = 9:8$,

ein Verhältnis, das als Ganzton bewertet wird (die Differenz von Quinte und Quarte

$(3:2) : (4:3) = 9:8$

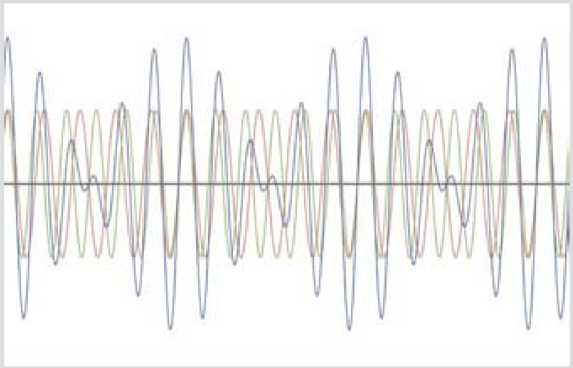


ergibt denselben Wert). Der von Pythagoras so berechnete »Überschuss« ist sieben Mal in der Oktave enthalten, da der Weg von einem gedachten Ton zu seiner Oktave insgesamt acht Stationen umfasst, also sieben Mal den »Überschuss« enthält. Entsprechend ergibt sich, dass die Folge von zwölf übereinandergeschichteten Quinten der Folge von sieben Oktaven entsprechen müsste. Nun ist aber

$(3:2)^{12} \neq (2:1)^7$.

Die Differenz dieser beiden Zahlen ist als »pythagoreisches Komma« in die Geschichte der Musiktheorie eingegangen – nicht weil Pythagoras dieses Komma berechnet hätte, wohl aber, weil damit die praktischen Grenzen des theoretischen pythagoreischen Systems aufgezeigt sind. Konsequenzen hat das beispielshalber beim Stimmen eines Konzertflügels: Die einzigen pythagoreisch rein gestimmten Intervalle sind die Oktaven. Alle anderen Intervalle sind unrein, wobei sich im Verlauf der Zeit verschiedene Möglichkeiten herausgebildet haben, das pythagoreische Komma auf die zwölf Tonstufen der chromatischen Skala zu verteilen. Der einfachste Weg, jede Stufe um ein Zwölftel Komma zu vermindern, ist dabei gleichzeitig der jüngste. Die hörende Begegnung mit anderen Stimmungssystemen belehrt freilich, dass der einfachste Weg nicht immer der beste sein muss.

Das Wissenssystem der Sieben Freien Künste mit Musik als Teil des Quadriviums begründete bis ins 18. Jahrhundert hinein auch die Vorstellung von Musik als tönender Mathematik. Dass es sich dabei um Berührungspunkte sehr verschiedener Phänomene beider Fächer handelt und zudem, wie dem Gezeigten zu entnehmen ist, die Anwendung der Mathematik über das kleine Einmaleins kaum hinausreichte, beschädigte diese Vorstellung von Musik als »scientia mathematica« ebensowenig wie das Eindringen wahrnehmungspsychologischer Aspekte. Noch Gottfried Wilhelm Leibniz hielt an der Zahlengesetzlichkeit von Musik unerschütterlich fest und beschrieb sie als verborgene arithmetische Übung: »*Musica est exercitium arithmeticae occultum nesciens se numerare animi*«, wird Leibniz häufig zitiert. Auch Leonhard Euler versuchte noch 1738, eine quantitative Maßeinheit für den Dissonanzgrad von Intervallen zu finden, indem er deren Proportionen bewertete. Seine Ergebnisse, ob stichhaltig oder nicht, sind letztlich auch nur eine späte Fortsetzung pythagoreischer Zahlenspekulation. Die Simplizität der mathematischen Methode mündet gewissermaßen zwangsläufig in eine Trivialität der musikalischen Ergebnisse, da die Tonhöhe als einziger musikali-



Überlagerung zweier Sinusschwingungen (rot und grün) im Verhältnis 5:4 (reine große Terz). Die blaue Kurve zeigt die Addition der beiden Amplituden.

scher Parameter in den Blick genommen wird. Und selbst dann hält die Theorie der Belastung durch die Praxis nicht stand. Eine gleichstufig temperiert – das heißt nicht rein im pythagoreischen Zahlsinn – gestimmte Terz wird vom Ohr als Konsonanz akzeptiert, auch wenn zur Bestimmung ihrer Proportion die eher unsinnliche Formel $\sqrt[12]{2}^{4}$:1 herangezogen werden muss.

Das späte Fortleben der ars musica als ars mathematica fand in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts vielleicht auch deswegen keine Fortsetzung, da die Trivialität der Methoden und Ergebnisse in einem eklatanten Widerspruch zu den Fähigkeiten steht, die die ästhetische Anschauung jener Zeit der Musik zuschreibt. Die Fähigkeit der Musik zur Bewegung der Affekte war zwar schon früher in den Blick genommen worden, doch unter den Auspizien von Empfindsamkeit und Sturm und Drang wurden diese Fähigkeiten gewissermaßen unter dem Mikroskop untersucht. Das Interesse an der »Musik der Alten«, wie man die griechische Antike umschrieb, blieb zwar vorhanden, doch konzentrierte man sich auf die Wirkungen der Musik, von denen bei den »Alten« berichtet wird, und versuchte, diese mit modernen Mitteln nachzuahmen. Grundlage dieses neu erwachten Interesses wie auch des Wissens über die »Musik der Alten« waren die gleichzeitig entstehenden Darstellungen der Musikgeschichte: Die Anfänge der Musikgeschichtsschreibung fallen zusammen mit der Abkehr von der Anschauung der ars musica als ars mathematica. In der Person des Universitätsorganisten und späteren Universitätsmusikdirektors Johann Nikolaus Forkel nahm die Universität Göttingen im deutschsprachigen Raum eine einsame Spitzenposition in dieser Entwicklung ein. Forkels in zwei Bänden 1788 und 1801 erschienene *Allgemeine Geschichte der Musik* reichte zwar letztlich nur bis zum 15. Jahrhundert, darf jedoch für sich in Anspruch nehmen, in deutscher Sprache die erste umfassende Grundlage der nunmehr historisch verstandenen Disziplin Musikwissenschaft zu sein.

Wenn Forkel auch immer wieder als Begründer der modernen Musikwissenschaft als einer kulturwissenschaftlichen, mit philologischen und hermeneutischen Methoden operierenden Disziplin angeführt wird, darf dabei aber nicht außer Acht bleiben, dass die Historische Musikwissenschaft nur einer von mehreren jeweils erheblich ausdifferenzierten Fachzweigen der Musikwissenschaft ist. Institutionell verankert ist im deutschsprachigen Raum zumeist die Dreiteilung von Historischer Musikwissenschaft, Systematischer Musikwissenschaft und Ethnomusikologie. Unter diesen Fachzweigen haben Teile der Systematischen Musikwissenschaft den vitalsten Bezug zur ars mathematica, etwa wenn mathematische Modelle zur Analyse musikalischer Kompositionen oder Prozesse herangezogen werden. Auch wird versucht, eine umfassende mathematische Musiktheorie zu finden.

Seit den 1950er Jahren wenden sich auch immer mehr Komponisten mathematischen Methoden als Grundlage des künstlerischen Prozesses zu. So programmierten Lejaren A. Hiller und Leonard M. Isaacson einen Computer darauf, Intervalle zufällig nach einer Markov-Kette erster Ordnung auszuwählen, außerdem rhythmische Muster und Aufführungsanweisungen zu generieren. Das Ergebnis mündete 1955/56 in die *Illiac-Suite* für Streichquartett, eine der Gründungsakten der Computermusik. Illiac steht dabei für den Namen des damaligen Computersystems der University of Illinois at Urbana-Champaign, das die Berechnungen vorgenommen hatte, deren Ergebnisse zunächst noch in konventionelle musikalische Notation überführt werden mussten, um schließlich von einem Streichquartett mit traditionellen Instrumenten aufgeführt zu werden. Stochastische Verfahren lassen sich auf unterschiedlichste Weise zur Bestimmung musikalischer Parameter einer Komposition heranziehen; experimentiert wurde und wird unter anderem auch mit fraktaler Geometrie, Mengenlehre, Gruppentheorie und nichtlinearen rekursiven Gleichungen.

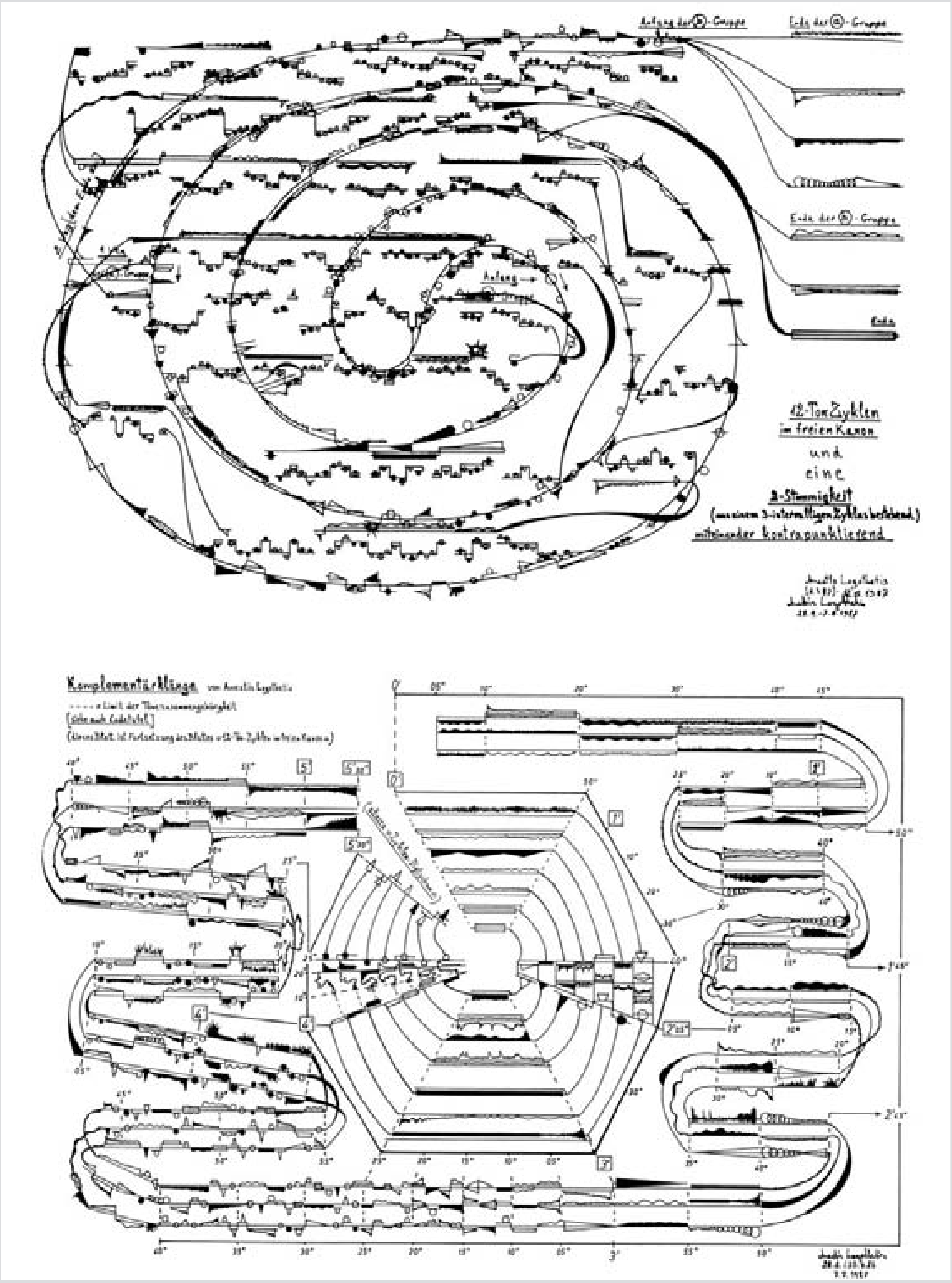
Auch in der Analyse von Musik spielen mathematische Methoden eine beachtliche Rolle. So ist es zum Beispiel ein Erfolg versprechender Versuch, Melodieverläufe in Vektoren zu beschreiben, um die Übereinstimmung oder Nicht-Übereinstimmung verschiedener Melodien automatisiert bestimmen zu können – angewandt beispielsweise auf das Repertoire pietistischer Kirchenlieder, deren Zahl auf rund 70.000 geschätzt wird, ist die Möglichkeit der Automatisierung kein ganz kleiner Vorteil. Freilich kann es auch zu unbeabsichtigten Fehleinschätzungen kommen. So wurde lange angenommen, dass im Schaffen des

Überlagerung zweier Sinusschwingungen im Verhältnis $\sqrt[12]{2}^{4}$:1 (große Terz bei gleichstufiger Teilung der Oktave). Die Addition der beiden Kurven (blau) zeigt ein anderes, in diesem Ausschnitt unregelmäßiges Muster. Die Unregelmäßigkeit ist als Rauheit des Klangs zu hören.

ungarischen Komponisten Béla Bartók (1881 – 1945), der im Gegensatz zu anderen Komponisten der musikalischen Moderne seine eigene Kompositionsweise kaum erläutert hat, Fibonacci-Reihen und der Goldene Schnitt eine ganz wesentliche Bedeutung für den Bau sowohl der Themen als auch der Harmonien haben; viele als charakteristisch in Bartóks Werken beobachtete Phänomene ließen sich auf die entsprechenden Zahlenordnungen zurückführen. Erst viele Jahre nach seinem Tod aber gaben Bartóks Erben das Manuskript einer Vorlesung frei, die Bartók in seinem letzten Lebensjahr an der Harvard University gehalten hatte, und aus der hervorgeht, dass die von Bartók in bäuerlichen Regionen Ungarns und Rumäniens gesammelten Volksliedmelodien seine maßgebliche Inspirationsquelle waren: die Ergebnisse ethnomusikologischer Feldforschung mithin.

Dieses Beispiel mahnt nicht zuletzt, keine allzu hohen Mauern zwischen den Fachzweigen der Musikwissenschaft zu errichten. Es mag gelten, dass Musik ein Herausheben undinglicher Ideen ist und als solche im selben Raum gedacht werden kann wie die Mathematik. Wenn sie aber gespielt und damit sinnlich erfahrbar wird, ist sie Resultat menschlichen Handelns, das ebenso vom geschichtlichen wie vom kulturellen und gesellschaftlichen Umfeld geprägt wird. Pythagoras hielt die Quarte aufgrund ihrer einfachen Zahlenproportion für eine Konsonanz, den Ohren des 18. Jahrhunderts jedoch galt sie als auflösungsbedürftige Dissonanz. Heutige Jazzmusiker wiederum kennen kaum ein schöner klingendes Intervall, in einigen außereuropäischen Musikkulturen schließlich kommt die Quarte im Tonsystem gar nicht erst vor. Im Sinn der ars mathematica mag es irritierend erscheinen: Doch in jenem Moment, da die ars musica die Sphäre des Undinglichen verlässt und – ganz einfach – hörbar wird, wird die Proportion 4:3 in höchstem Maße relativ.

Noch einmal zurück in den Delta-Quadranten. Die Macher der Serie haben vermutlich nicht intendiert, auf musikwissenschaftliches Interesse zu stoßen, doch aus dieser Perspektive hält die bewusste Folge durchaus noch eine weitere Pointe bereit. Die Crew der Voyager, gute Gastgeber, veranstaltet nämlich ein Konzert zu Ehren des neu erwachten Interesses der Qomari an der Musik. Doch die sind überraschend wählerisch: Ein gut gespielter Jazz-Standard entspricht nicht ihrem Geschmack. Man präferiert den Doktor – weil er singt. Obwohl in der gewählten Gegenüberstellung des Films die komplexeren rhythmischen und harmonischen Muster eindeutig auf Seiten des Jazzstücks zu hören sind, ist auch ein fernes Volk in ferner Zukunft eher von der emotionalen Unmittelbarkeit des Gesangs fasziniert. Eine bemerkenswert zeitlose Zukunftsschau.



Anestis Logothetis Zwölftonzyklen im freien Kanon und eine Zweistimmigkeit (aus einem 3-intervalligen Zyklus bestehend) miteinander kontrapunktierend

In the historical beginnings, mathematics and music theory still fuse largely into one. Arithmetic, geometry, astronomy and music form the *quadrivium* within the seven liberal arts, or *septem artes liberales*, which in the days of late antiquity and the Middle Ages was at the centre of the knowledge system. Music was regarded as a science of numbers but one with an inestimable advantage: it allowed something that could otherwise be considered only in abstraction to be experienced by the senses.

This construct of ideas has come down to us from the Pythagoreans, a community surrounding the universal scholar Pythagoras of Samos who was seen as a worker of wonders and enunciator of a new religious doctrine. Pythagoras and the Pythagoreans initially set two matters in relation to one another: planets and consonances. Through movement within the heavenly body, a harmony is created when the sounds of individual stars produce consonances. The Sun and Saturn, for example, interrelate in the same way as the numbers 2:1; in musical terms this relationship corresponds to the octave, a perfect consonance. Recognition of these relationships in abstraction is no easy matter, so the rendering of them perceptible by the senses must have been a welcome step. The instrument commonly used for such demonstrations was the monochord, with one end of the string representing the Earth as the initial point and the other end of the string representing Saturn, the most distant planet. The Sun is exactly halfway between the two, the division of the string therefore being 2:1: the octave, an audibly perfect harmony.

Into the 18th century, the concept of music as sounding mathematics continued to be explained by the knowledge system of the seven liberal arts, with music forming a part of the *quadrivium*. The fact that the points of contact linking the two matters involve highly disparate phenomena, and that the mathematical application scarcely went beyond simple multiplication, hardly dented this notion of music as a »scientia mathematica« at all; the same applied for the intrusion of aspects relating to the psychology of perception. As late as 1738, Leonhard Euler was attempting to find a quantitative unit of measurement for the degree of dissonance in intervals by evaluating their proportions. Both the methods and the results of this work ultimately constituted none other than a late extension of Pythagorean number speculation.

Modern approaches are based on models of far greater complexity. Since the 1950s, more and more composers have been turning to mathematical models as a basis for the artistic process. Lejaren A. Hiller and Leonard M. Isaacson, for example, programmed a computer to select intervals at random according to a first-order Markov chain, as well as to generate rhythmic patterns and instructions for performance. This culminated in the 1955/56 *Illiac Suite* for string quartet, Illiac standing for the name of the computer system which, being the system employed by the University of Illinois at Urbana-Champaign at the time, had performed the calculations. Stochastic procedures can be drawn on in highly diverse ways to determine the musical parameters of a composition; experiments have been and are being conducted using, amongst other techniques, fractal geometry, set theory, group theory and nonlinear recursive equations.

In the analysis of music, too, mathematical methods have in the meantime come to play a significant role. The experimental endeavour to describe the course of melodies in vectors with a view to determining the match or variance of different melodies in an automated manner, for example, is a promising one – when applied, for instance, to the repertoire of pietistic hymns of which there are estimated to be some 70,000 in all, this possibility represents no mean advantage.

Prof. Dr. Andreas Waczkat, Jahrgang 1964, studierte von 1986 bis 1992 Musikwissenschaft und Theologie in Berlin und von 1987 bis 1991 Tonsatz und Gehörbildung an der Hochschule der Künste Berlin. Nach Tätigkeiten in Detmold und Langenhagen sowie als freier Mitarbeiter beim Westdeutschen Rundfunk Köln war Andreas Waczkat von 1994 bis 2004 am Musikwissenschaftlichen Institut der Universität Rostock tätig. Dort wurde er 1997 mit einer Arbeit über deutsche Parodiemessen des 17. Jahrhunderts promoviert. 2005 folgte die Habilitation mit einer Studie zu den musikalischen Dramen Johann Heinrich Rolles. Vor seiner Berufung auf eine Professur für Historische Musikwissenschaft an die Universität Göttingen im Jahr 2008 – im Rahmen der Kooperation mit der Hochschule für Musik und Theater Hannover – lehrte und forschte der Musikhistoriker in Hannover sowie an den Universitäten Münster, Lüneburg und Kiel. Auslandsaufenthalte führten ihn in die USA und nach Polen. Seit 2002 ist Prof. Waczkat Sprecher der Fachgruppe »Musikwissenschaft und Musikpädagogik« in der Gesellschaft für Musikforschung, seit 2004 Schriftleiter der Cöthener Bach-Hefte. Seine Arbeitsschwerpunkte sind die Musik in der Kulturgeschichte des 16. bis 18. Jahrhunderts, Musiktheorie und Kompositionsgeschichte, Historische Musikwissenschaft und Neue Medien sowie die Musica Baltica.

Autoren

Prof. em. Dr. Benno Artmann
Georg-August-Universität Göttingen
Fakultät für Mathematik und Informatik, Mathematisches Institut
Bunsenstraße 3 – 5, 37073 Göttingen
Telefon +49 (0)551 / 39-7762
artmann@uni-math.gwdg.de

Prof. Dr. Xiaoming Fu
Georg-August-Universität Göttingen
Fakultät für Mathematik und Informatik, Institut für Informatik
Goldschmidtstraße 7, 37077 Göttingen
Telefon +49 (0)551 / 39-172023
fu@cs.uni-goettingen.de

Prof. em. Dr. Hubert Goenner
Georg-August-Universität Göttingen
Fakultät für Physik, Institut für Theoretische Physik
Friedrich-Hund-Platz 1, 37077 Göttingen
Telefon +49 (0)551 / 39-7689
goenner@theorie.physik.uni-goettingen.de

Privatdozentin Dr. Katharina Habermann
Georg-August-Universität Göttingen
Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen (SUB)
Platz der Göttinger Sieben 1, 37073 Göttingen
Telefon +49 (0)551 / 39-13266
habermann@mail.sub.uni-goettingen.de

Prof. Dr. Dieter Hogrefe
Georg-August-Universität Göttingen
Fakultät für Mathematik und Informatik, Institut für Informatik
Goldschmidtstraße 7, 37077 Göttinge
Telefon +49 (0)551 / 39-172001
hogrefe@cs.uni-goettingen.de

Prof. Stephan Klasen, Ph.D.
Georg-August-Universität Göttingen
Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät
Professur für Volkswirtschaftstheorie und Entwicklungsökonomik
Platz der Göttinger Sieben 3, 37073 Göttingen
Telefon +49 (0)551 / 39-7303
sklasen@uni-goettingen.de

Prof. Dr. Rainer Kreß
Georg-August-Universität Göttingen
Fakultät für Mathematik und Informatik
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Lotzestraße 16 – 18, 37083 Göttingen
Telefon +49 (0)551 / 39-4511
kress@math.uni-goettingen.de

Juniorprofessorin Dr. Tatyana Krivobokova
Georg-August-Universität Göttingen
Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät
Courant Forschungszentrum »Armut, Ungleichheit und
Wachstum in Entwicklungsländern«
Platz der Göttinger Sieben 3, 37073 Göttingen
Telefon +49 (0)551 39-10601
tkrivob@uni-goettingen.de

Prof. Dr. Ralf Meyer
Georg-August-Universität Göttingen
Fakultät für Mathematik und Informatik, Mathematisches Institut
Bunsenstraße 3 – 5, 37073 Göttingen
Telefon +49 (0)551 / 39-7774
rameyer@uni-math.gwdg.de

Prof. Dr. Felix Mühlhölzer
Georg-August-Universität Göttingen
Philosophische Fakultät, Philosophisches Seminar
Humboldtallee 19, 37073 Göttingen
Telefon +49 (0)551 / 39-4732
fmuehlh@gwdg.de

Prof. Dr. Axel Munk
Georg-August-Universität Göttingen
Fakultät für Mathematik und Informatik
Institut für Mathematische Stochastik
Goldschmidtstraße 7, 37077 Göttingen
Telefon +49 (0)551 / 39-172111
munk@math.uni-goettingen.de

Prof. Dr. Thomas Noll
Georg-August-Universität Göttingen
Philosophische Fakultät
Kunstgeschichtliches Seminar und Kunstsammlung
Nikolausberger Weg 15, 37073 Göttingen
Telefon +49 (0)551 45205 (privat)
iruehli@gwdg.de (Institut)

Prof. Dr. Thomas Schick
Georg-August-Universität Göttingen
Fakultät für Mathematik und Informatik, Mathematisches Institut
Bunsenstraße 3 – 5, 37073 Göttingen
Telefon +49 (0)551 / 39-7766
schick@uni-math.gwdg.de

Prof. Dr. Anita Schöbel
Georg-August-Universität Göttingen
Fakultät für Mathematik und Informatik
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Lotzestraße 16 – 18, 37083 Göttingen
Telefon +49 (0)551 / 39-12237
schoebel@math.uni-goettingen.de

Prof. Dr. Henning Schulzrinne
Columbia University
Department of Computer Science
208 Hamilton Hall, 1130 Amsterdam Avenue
New York, NY 10027, USA
hgs@cs.columbia.edu

Dr. Cordula Tollmien
Rehhagen 7, 34346 Hann. Münden
Telefon +49 (0)5541 2285
info@tollmien.com

Prof. Dr. Yuri Tschinkel
New York University
Courant Institute of Mathematical Sciences
251 Mercer Street, New York, NY 10012, USA
Telefon 001 212 998-3145
tschinkel@cims.nyu.edu

Prof. Dr. Andreas Waczkat
Georg-August-Universität Göttingen
Philosophische Fakultät, Musikwissenschaftliches Seminar
(in Kooperation mit der Hochschule für Musik und Theater Hannover)
Kurze Geismarstraße 1, 37073 Göttingen
Telefon +49 (0)551 / 39-5072
andreas.waczkat@phil.uni-goettingen.de

Dr. Axel Wittmann
Georg-August-Universität Göttingen
Fakultät für Physik
Institut für Astrophysik
Friedrich-Hund-Platz 1, 37077 Göttingen
Telefon +49 (0)551 / 39-5045
wittmann@astro.physik.uni-goettingen.de

Prof. Dr. Florentin Wörgötter
Bernstein Centre for Computational Neuroscience (BCCN) und
Fakultät für Mathematik und Informatik, Institut für Informatik
Bunsenstraße 10, 37073 Göttingen
Telefon +49 (0)551 / 5176528
worgott@bccn-goettingen.de

Forschungseinrichtungen

Courant Forschungszentrum »Armut, Ungleichheit und Wachstum in Entwicklungsländern: Statistische Methoden und empirische Analysen« (»Poverty, Equity, and Growth in Developing and Transition Countries: Statistical Methods, Empirical Analyses, and Policy Issues«)
Platz der Göttinger Sieben 3, 37073 Göttingen
Telefon +49 (0) 551 / 39-7303
sklasen@uni-goettingen.de
Koordinator: Prof. Stephan Klasen, Ph.D.

Courant Forschungszentrum »Strukturen höherer Ordnung in der Mathematik« (»Higher Order Structures in Mathematics«)
Bunsenstraße 3 – 5, 37073 Göttingen
Telefon +49 (0)551 / 39-7766
schick@uni-math.gwdg.de
Koordinator: Prof. Dr. Thomas Schick

Deutsch-Schweizer Statistik-Forschergruppe: Statistische Regularisierung unter qualitativen Nebenbedingungen – Inferenz, Algorithmen, Asymptotik und Anwendungen (»Statistical Regularization and Qualitative Constraints«)
Institut für Mathematische Stochastik
Goldschmidtstraße 7, 37077 Göttingen
Telefon +49 (0)551 / 39-172111
munk@math.uni-goettingen.de
Sprecher: Prof. Dr. Axel Munk

Graduiertenkolleg »Mathematische Strukturen in der modernen Quantenphysik« (»Mathematical Structures in Modern Quantum Physics«)
Fakultät für Mathematik und Informatik, Mathematisches Institut
Bunsenstraße 3 – 5, 37073 Göttingen
Telefon +49 (0)551 / 39-7774
rameyer@uni-math.gwgd.de
Sprecher: Prof. Dr. Ralf Meyer

Graduiertenkolleg »Identifikation in mathematischen Modellen: Synergie stochastischer und numerischer Methoden« (»Identification in Mathematical Models: Synergy of Stochastic and Numerical Methods«)
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Lotzestraße 16 – 18, 37083 Göttingen
Telefon +49 (0)551 39-4511
gk1023@math.uni-goettingen.de
Sprecher: Prof. Dr. Rainer Kreß

Mathematik-Olympiade / Niedersächsische Landesrunde
c/o Georg-August-Universität Göttingen
Fakultät für Mathematik und Informatik
Mathematisches Institut
Bunsenstraße 3 – 5, 37073 Göttingen
Telefon +49 (0)551 / 2713027
mo@math.uni-goettingen.de
http://www.math.uni-goettingen.de/mo/
Alle Schülerangebote: www.math.uni-goettingen.de/schueler/

Zentralarchiv für Mathematiker-Nachlässe an der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1, 37073 Göttingen
Telefon: +49 (0)551 / 39-13266
habermann@mail.sub.uni-goettingen.de

Zentrum für Informatik
Georg-August-Universität Göttingen
Goldschmidtstraße 7, 37077 Göttingen
Telefon +49(0)551 / 39-172010
hogrefe@cs.uni-goettingen.de
Sprecher des Vorstands: Prof. Dr. Dieter Hogrefe

»It is Göttingen. Göttingen is here«

Foto: Gisa Kirschmann-Schröder

UNIVERSITÄTSBUND GÖTTINGEN E.V.

Der Universitätsbund

Lehrende, Ehemalige, Studierende, Vertreter von Wirtschaft und Handel sowie Persönlichkeiten aus allen gesellschaftlichen Bereichen haben sich zusammengeschlossen, um im Universitätsbund Göttingen „ihre“ Georg-August-Universität ideell und materiell zu unterstützen. In Zeiten, in denen sich der Staat verstärkt aus seiner Verantwortung für die ausreichende finanzielle Ausstattung der Hochschulen zurückzieht, wird privates Engagement immer wichtiger. Es gilt die Rahmenbedingungen für Forschung und Lehre zu verbessern sowie das Innovationspotential der Universität zu stärken.

Die traditionsreiche Georgia Augusta genießt weltweit einen exzellenten Ruf in der Forschung. Sie hat durch eine besondere Vielfalt im Fächerspektrum und in den internationalen Studienprogrammen eine hohe Anziehungskraft für Studierende aus aller Welt.

Der 1918 als gemeinnützige Vereinigung gegründete Universitätsbund Göttingen e.V. sieht es als seine Aufgabe an, dazu beizutragen, diese Stärken zu bewahren und auszubauen. Dies geschieht in erster Linie durch die Bereitstellung finanzieller Mittel für wissenschaftliche und kulturelle Veranstaltungen der Universität.

Ein besonderes Anliegen des Universitätsbundes ist die Förderung des Dialogs zwischen Wissenschaft und Wirtschaft, Universität und Öffentlichkeit. Förderungsschwerpunkte sind neben den finanziellen Beihilfen für Studierende und Nachwuchswissenschaftler beispielsweise Unterstützungen für die Veranstaltung von Tagungen und Vorlesungsreihen sowie für das gemeinsam mit dem Präsidenten herausgegebene Wissenschaftsmagazin und die Akademische Orchestervereinigung. Ein Großprojekt der letzten Jahre war die Renovierung und Bestuhlung der Aula am Wilhelmsplatz.

Geschäftsstelle

Universitätsbund
Göttingen e.V.
Wilhelmsplatz 1
37073 Göttingen

Montag bis Freitag
jeweils von 9 bis 12 Uhr

Tel.: (0551) 42062
Fax: (0551) 48 832 48
E-Mail: unibund@gwdg.de

Mitgliedschaft

Ohne Mitglieder wäre es dem Universitätsbund nicht möglich, seine umfangreichen Aufgaben zu erfüllen. Mit ihren Beiträgen und Spenden tragen die Mitglieder wesentlich dazu bei, die Konkurrenzfähigkeit der Göttinger Universität zu erhalten. Wer sich mit der Georg-August-Universität verbunden fühlt und die Aktivitäten des Universitätsbundes unterstützen möchte, ist daher eingeladen, dem Universitätsbund beizutreten.

Die Mitglieder des Universitätsbundes erhalten kostenlos u. a. das Wissenschaftsmagazin sowie die Göttinger und Bursfelder Universitätsreden.

Der Mindestbeitrag beträgt pro Jahr:

30 € für Privatpersonen
60 € für Firmen, Körperschaften, Vereine usw.

Formulare für die Mitgliedschaft sind auf unserer Internetseite (www.unibund.gwdg.de) erhältlich oder direkt von der Geschäftsstelle zu beziehen.

Spenden

Wenn Sie dem Universitätsbund Göttingen e.V. eine Spende zukommen lassen wollen, geben Sie bitte an, ob es sich um

- eine allgemeine Spende für die Arbeit des Universitätsbundes oder
- eine zweckgebundene Spende für ein Institut oder ein bestimmtes Projekt handelt.

Bankverbindungen

Commerzbank Göttingen
BLZ 260 400 30
Kto: 6 229 215

Deutsche Bank Göttingen
BLZ 260 700 72
Kto. 04/06496

Sparkasse Göttingen
BLZ 260 500 01
Kto. 52 803